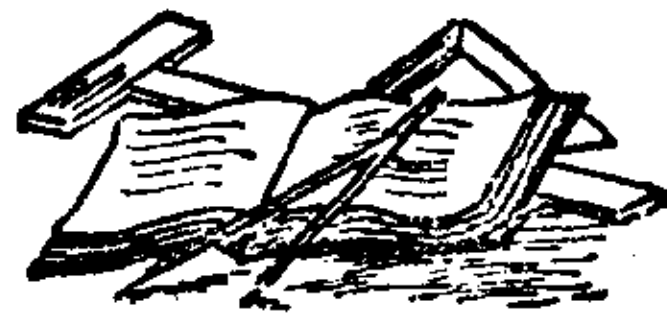


青年数学丛书

直 圆 柱

米拉基扬著
何仁炯译



中国青年出版社

1957年·北京

內 容 提 要

直圓柱在技術上應用得很多，在日常生活中，也常常碰到直圓柱的例子。跟直圓柱有關的，有很多有趣的東西。這本小冊子前三節研究了跟直圓柱有關的三種曲綫——螺旋綫、橢圓和正弦曲綫；接下去四節研究了跟直圓柱有關的四個實際問題：計算在傾斜的圓柱容器里盛水的體積問題，圓柱轉動時的動能和轉動慣量問題，圓柱容器底下漏水快慢的問題以及全面積一定的圓柱什麼時候體積最大的問題；最後一節從圓柱面討論了這樣一個問題：曲面的面積是不是可以看做內接于曲面的多面體當面數無限增多、而各個面的面積無限縮小的面積的極限？用到的知識不超出中學數學的範圍，雖然有些問題實質上是高等數學的問題。

Г. М. МИРАКЬЯН

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР

ГОСТЕХИЗДАТ

МОСКВА, 1955

譯 者 的 話

譯完了这本小冊子，我想跟讀者簡單地交流一下学习心得。

这本小冊子是苏联技术理論書籍出版社出版的一套“数学通俗講演”里的一本。我認為学习这类数学小冊子的好处，首先就在：它可以使我們更深刻地認識到，数学并不是枯燥的空理論，而是和生产有紧密的联系的。数学生动地反映着客觀規律，是我們建設事业不可缺少的工具。例如在这本小冊子里，我們可以看到，正弦曲綫是做弯管的时候需要用到的；研究了求极大值的方法，就能为国家节省資金，等等。这些例子，都会使我們很自然地“枯燥”的数学发生感情。

此外，通过这类小冊子的学习，我們可以很有兴趣地来复习中学数学里講到的东西，例如在这本小冊子里，我們會复习到直圓柱的公式和級数等等問題。同时，在这类小冊子里常常很自然地引入一些高等数学的基本概念。例如在这本小冊子里，就提到了螺旋綫、測地綫、橢圓、极限等等的基本概念，对將來学习高等数学是很有帮助的。所以我認為，这类小冊子是在初等数学的基础上向高等数学进軍的跳板。希望讀者在学习中有所收获。

何仁炯 1956年4月6日

原 序

这本小册子的基础是我在 1953 年三月对参加第十二届敖德薩中学高年級数学竞赛会的学生所做的講演。竞赛是在敖德薩国立梅契尼科夫大学物理数学系組織下进行的。上述講演稿的内容只包括象这本小册子的第二、第五和第八节里所講的那些,其余各节也很有趣,当然,要把它們都放在一次兩小时的講演里,那是不可能的。

这本小册子的内容,九年級和十年級^①的同学是完全可以領会的,因为解答問題所用的方法並沒有超出中学数学的范围,虽然實質上这些問題是高等数学的問題。

在这里,我認為必須向对这本小册子提供了宝貴改进意見的吉洪諾娃同志致謝。

Г. М. 米拉基揚

^① 相当于我国高中二年級和三年級。——譯者注

前 言

从中学几何課本知道,柱面是由一条直綫(母綫)沿着某一条曲綫(准綫)作平行于已知方向的移动而得到的.

假如准綫是个圓,而母綫垂直于这个圓的平面,那么我們得到的就是一个直圓柱. 換句話說,可以給直圓柱下这样一个定义:直圓柱是互相平行的兩条直綫中的一条繞着作为轉动軸的另一条轉动所形成的面.

兩個垂直于直圓柱軸的平面截直圓柱而得到的直圓柱的一部分,也叫做直圓柱;这时候,這兩個平面之間的距离叫做直圓柱的高.

从中学几何課本还知道,底半徑是 R 、高是 H 的圓柱体,体积等于

$$\pi R^2 H,$$

側面积等于

$$2\pi R H,$$

而全面积等于

$$2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

自然会发生这样一个問題:关于直圓柱还有什么該知道的呢?

初看起来,好象关于直圓柱的所有东西,这就都說完了. 但是,实际上并不是这样. 从这本小冊子,讀者就会知道,跟

直圓柱这种看来这么簡單的几何面有关的,还有很多有趣的东西哩。

要知道,直圓柱在技术上应用的很多;在日常生活中,我們也常常会碰到直圓柱的例子。机械和机器上的軸、軸承的表面、飞輪的輪緣、各种管子的側面、石油槽,以至罐头和卷筒紙——所有这些东西,都有直圓柱的形狀。

下面我們就把直圓柱簡称做圓柱。

一

把底半徑是 R 、高是 H 的直圓柱,沿它的一条母綫切开,然后把这个面攤平;这时候,我們得到了一个底是 $2\pi R$ 、高是 H 的矩形。这个矩形就叫做这个圓柱在平面上的展开面。这种展开面用其他方法也可以得到,用不着把圓柱切开。假設在一个圓柱的表面新涂了一层顏料,把它放在一个平面上,沿着一条母綫和平面相接触。現在,把圓柱沿着平面沒有滑动地滾动一周;那么,在平面上就会出现圓柱面的印迹,它的形狀是一个底等于 $2\pi R$ 、高等于 H 的矩形,也就是前面所說的展开面。反过來說,每一个底等于 a 、高等于 b 的矩形,都可以看做是高等于 b 、底半徑等于 $\frac{a}{2\pi}$ 的直圓柱的展开面。

容易看出,半徑等于 R 的无限圓柱的展开面,是包含在相距等于 $2\pi R$ 的兩条平行綫之間的一部分平面。

應該指出,并不是所有的面都能在平面上展开,例如球面就不能在平面上展开。直圓錐却可以在平面上展开;这里展开面是一个扇形。

以后我們就要用到圓柱的展开面。

現在，先来介紹一条跟圓柱有直接关系的曲綫。

在半徑是 R 的圓柱上取圓 ABC ，这个圓位于跟圓柱軸垂直的平面上；把直角三角形 KEC 繞在圓柱上，使直角边 CE 繞在圓 ABC 上；那么斜边 CK 在圓柱上就形成了一段曲綫，这段曲綫叫做螺旋綫(图 1)。

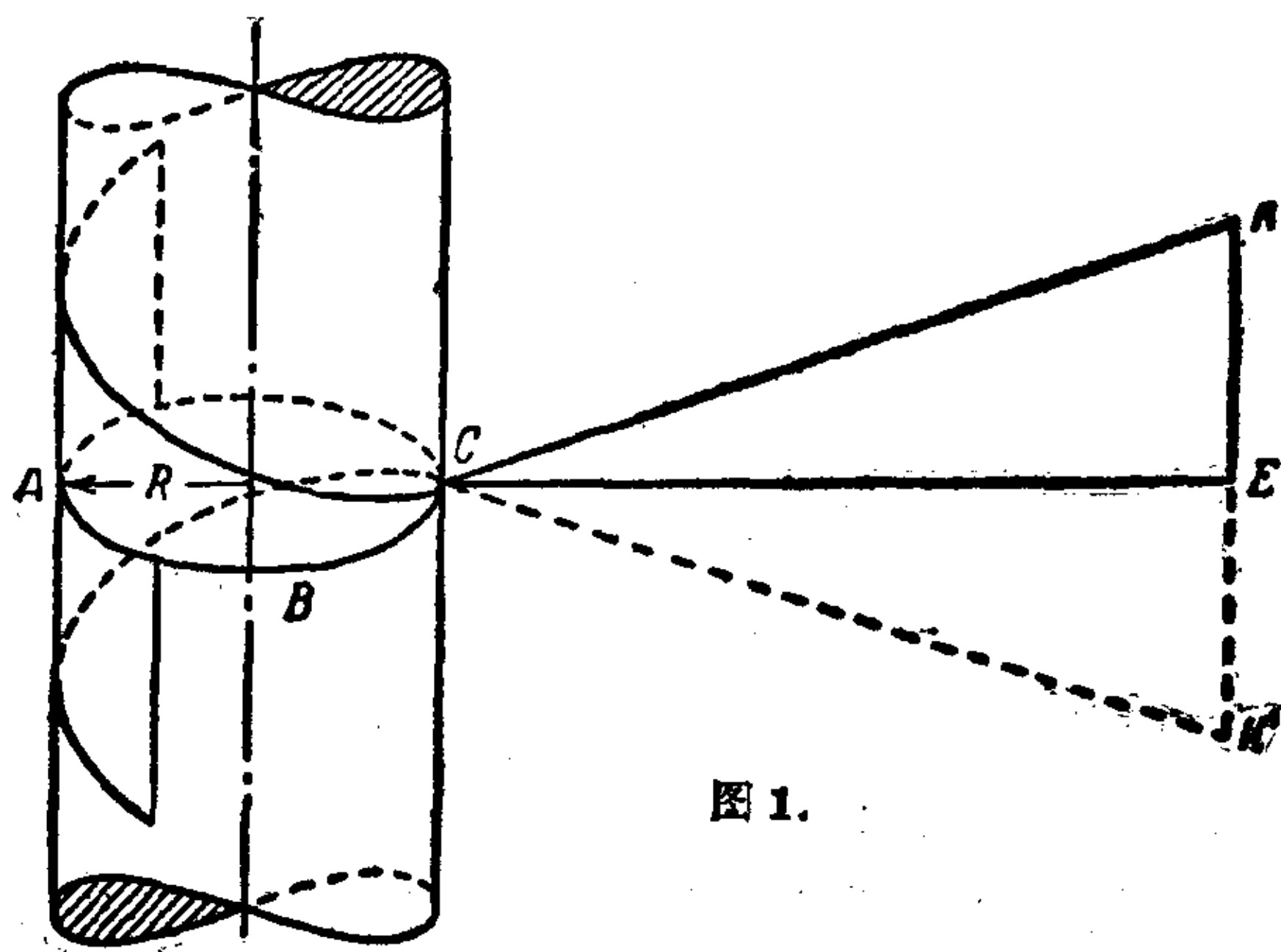


图 1.

把三角形 KCE 繞直角边 CE 旋轉 180° ，再把它繞在圓柱上，繞的方向跟三角形 KCE 第一次繞的相反；那么就得到了另一段螺旋綫，这段螺旋綫是起先得到的那一段的延續(在图 1 上三角形 KCE 的第二个位置用 CEK' 来表示)。如果无限增長直角边 CE ，就得到整条的螺旋綫。

螺旋綫跟同一条母綫相交的前后兩点之間的綫段，叫做螺旋綫圈。母綫上这样兩点間的距离，叫做螺旋距。角 KCE 叫做螺旋角，用 α 来表示。为了求出螺旋綫圈的長 l 和螺旋距 h ，請看

直角三角形 CE_0K_0 ，它的直角边 CE_0 等于 $2\pi R$ ，而角 K_0CE_0 等于螺旋角 α (图 2)。容易看出，斜边 K_0C 等于螺旋圈的长 l ，而直角边 K_0E_0 等于螺距 h 。

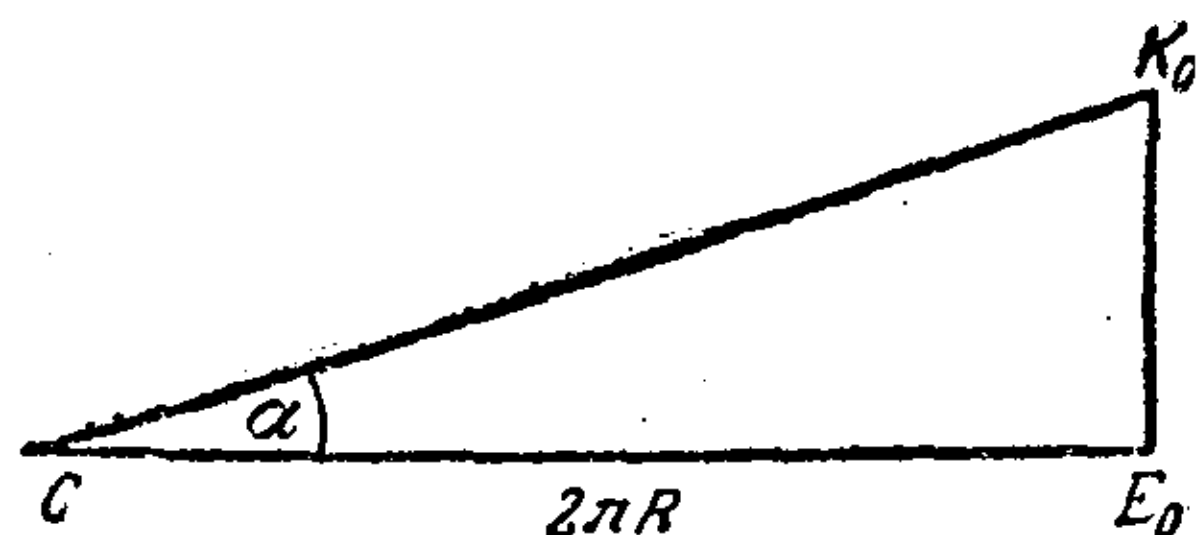


图 2.

因此得到公式

$$l = \frac{2\pi R}{\cos \alpha}, \quad (1)$$

$$h = 2\pi R \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

螺旋线有右螺旋和左螺旋两种。假设有一个点，沿着螺旋线运动。螺旋线在垂直于它的轴（螺旋线所绕的圆柱的轴，就叫做螺旋线的轴）的平面上的射影，显然是个圆。因此，假如按轴的方向对着螺旋线看，那么就会看见这个点是沿着圆在运动。假如这个点顺时针方向沿着圆运动的时候是逐渐离我们远去的，这种螺旋线就叫做右螺旋线；假如它顺时针方向运动的时候跟我们越来越接近，这种螺旋线就叫做左螺旋线。在同一个圆柱上，螺旋角相同的右螺旋线和左螺旋线是不可能重合的。在图 1 上我们得到的是左螺旋线；假如要得到右螺旋线，应该把三角形按相反的方向绕起来。

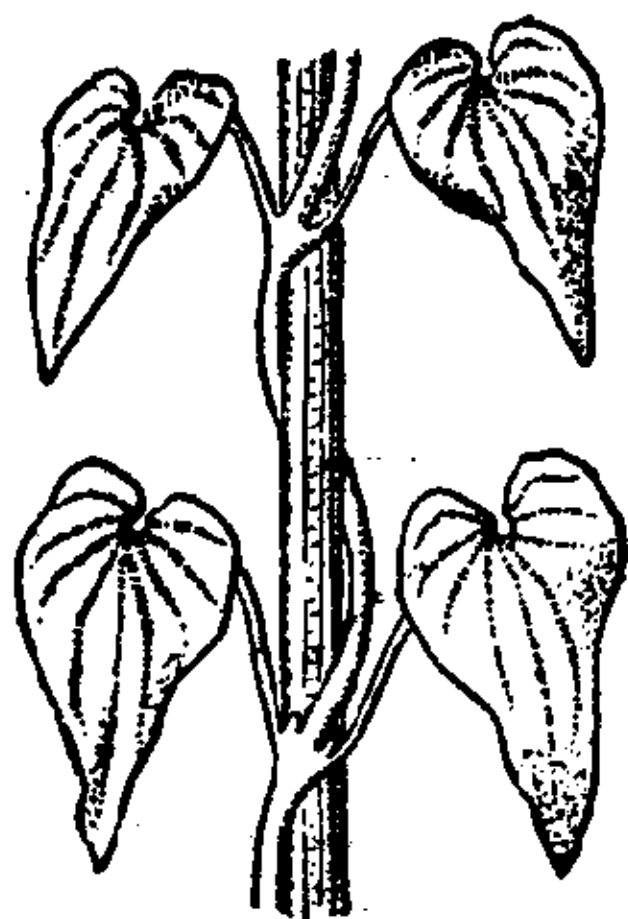
在自然界里，蔓生植物的卷须是具有螺旋线的形状的。象葡萄、蛇麻草、菜豆、豌豆等等植物的卷须，都可以作为例子。同时在卷须缠绕时，假如支杆在它的左边，就形成右螺旋

綫；假如在卷須運動時（卷須在空間描出一個圓錐，就是所謂卷須的轉頭運動），碰到豎直的支杆在右邊，那麼，卷須就沿着支杆繞成左螺旋綫。

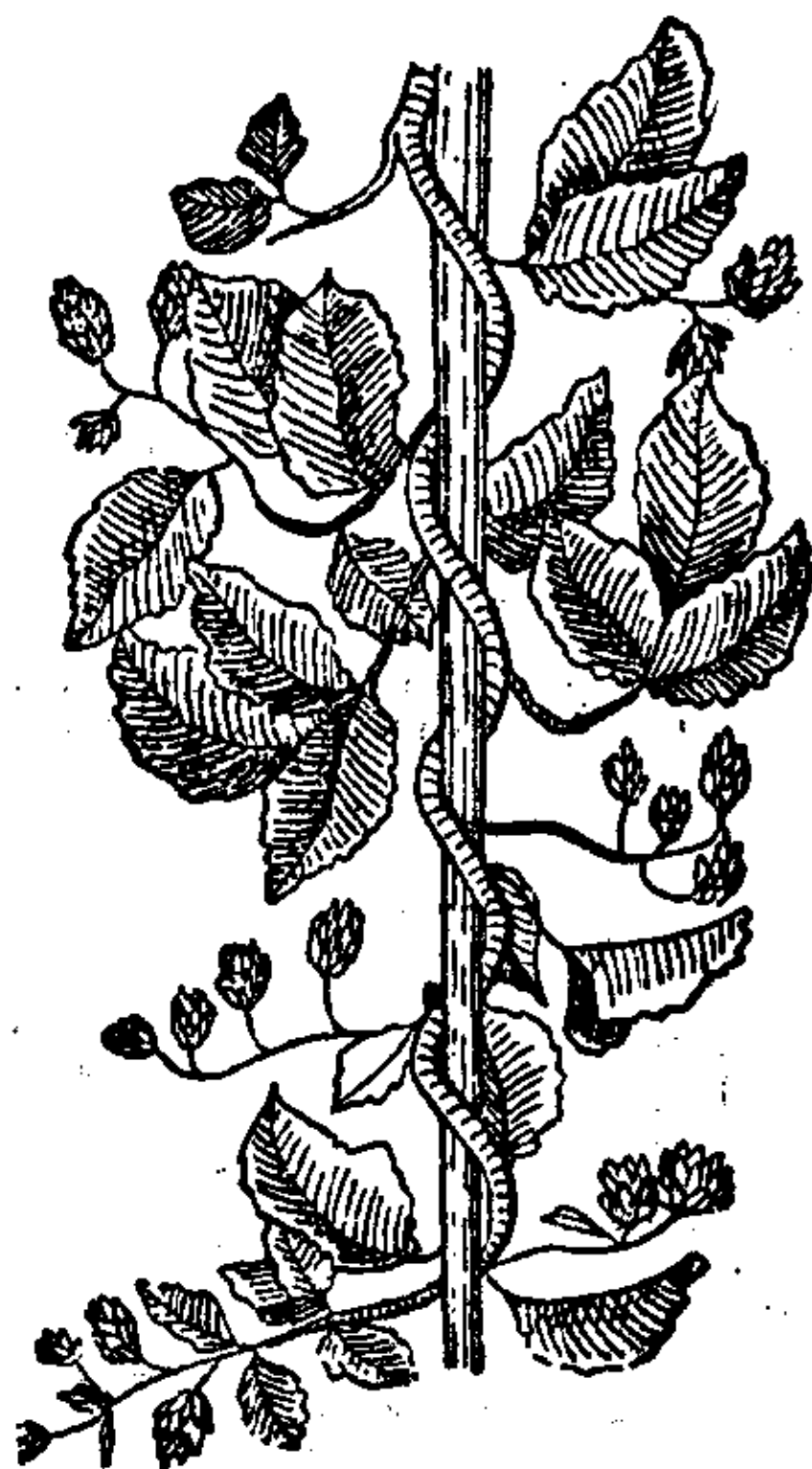
至於蔓生植物的莖，也能沿着支杆繞成螺旋綫；不過它們每一種都是按着一定方向繞卷的。大部分蔓生植物都繞成右螺旋綫，例如菜豆、牽牛花和甘薯等都是；繞成左螺旋綫的，有蛇麻草和忍冬。

在物理學上和技術上，我們也常常會碰到螺旋綫的例子。

感應綫圈上的每一層導綫都具有螺旋角很小的螺旋綫形狀。車床在勻速走刀的情況下車圓柱，圓柱上留下的痕迹就呈螺旋綫形狀。圓柱形麻花鑽頭的切削刃也具有螺旋綫的形狀。各種安裝螺絲和調整螺絲、螺栓和螺帽上的螺紋都是螺旋綫（通常都採用右螺旋紋）。飛機作直綫勻速飛行時，它螺旋槳



①



②

圖 3. 1, 甘薯的莖, 繞成右螺旋綫; 2, 蛇麻草的莖, 繞成左螺旋綫

上的点描繪着螺旋綫。远洋輪船和小汽艇的螺旋推进器上的点也描繪着螺旋綫。拔瓶塞用的螺旋錐上也有螺旋綫。飞机“进入螺旋”的时候，机翼上的点描繪着螺旋綫。来复枪彈和炮彈在作直綫匀速飞行的时候，它們表面上的点也都描繪着螺旋綫。上面所举科学技术性質的例子，在計算的时候都要用到螺旋綫的这个或者那个性質。这些例子，在数量上和性質上都可以說明螺旋綫在实际应用上的重要性。

現在我們来研究一下螺旋綫的某些性質。

試証明螺旋綫在平行于螺旋綫軸的平面上的射影，是一
条正弦曲綫。

假設螺旋綫是在半徑 R 的圓柱上，螺距是 h 。为了証明上述論断，显然只要研究一个螺綫圈就够了。設 $OMM_1M_2P_3$ 是一个螺綫圈，它在長是 h 的“一段”圓柱上；而 $OPP_1P_2P_3$ 是它在沿母綫 OP_3 和圓柱相切的平面上的射影(图 4)。在切面上取直角坐标， O 是原点，母綫 OP_3 作 Ox 軸，而 Oy 軸在 O 点垂直于 OP_3 。

用 P 来代表螺綫圈上任意一点 M 的射影。从 P 点引 Ox

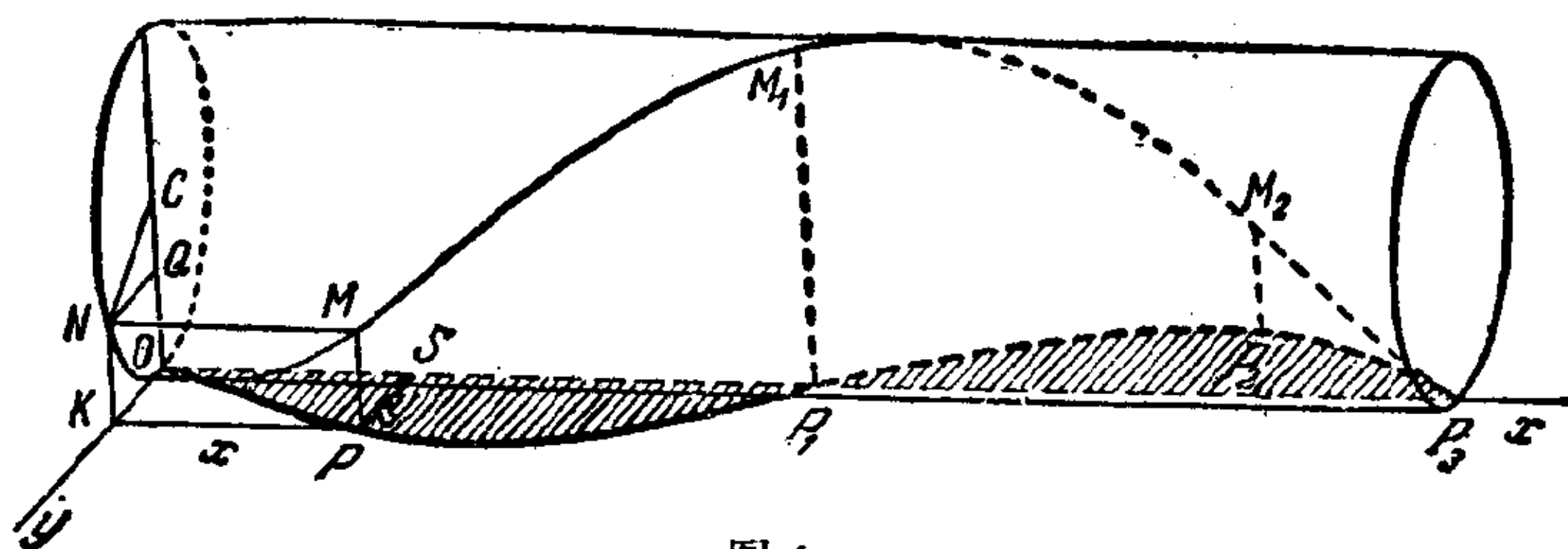


图 4.

軸的垂綫 PS , 并用 x 來代表綫段 OS 的長, 用 y 來代表垂綫 PS 的長; 那麼, P 點的橫坐標是 x , 縱坐標就是 y . 當 P 點沿着螺旋綫的射影移動的時候, 它的坐標 x 和 y 也隨着在改變; 同時, 它們之間還有某種關係. 這種關係就是我們所要確定的.

作出 M 點和 P 點在圓柱底平面上的射影, 得到 N 點和 K 點(圖 4). O 點是底面的圓心. 連接 O 點和 N 點, 並從 N 點引直綫 OC 的垂綫 NQ . 可以看出, $NM = KP = OS = x$, 還有, $QN = OK = SP = y$. 把圓柱面的 NOM 部分展開, 就得到直角三角形 NOM (在圖 5 上, 三角形 NOM 的尺寸是放大了一倍).

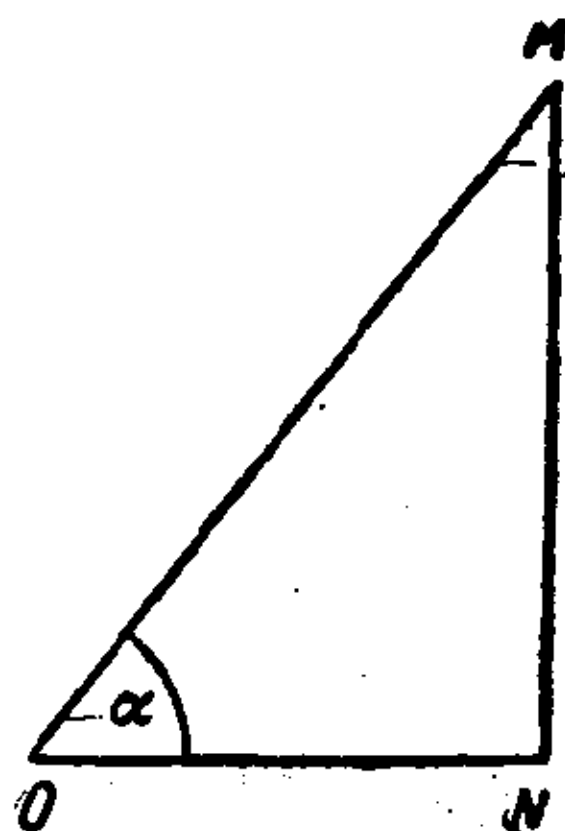


圖 5.

角 MON 等於螺旋角 α , 可以從等式(2)來確定:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi R}.$$

從圖 5 可以求出直角邊 ON :

$$ON = MN \operatorname{ctg} \alpha = x \operatorname{ctg} \alpha = x \frac{2\pi R}{h}.$$

現在, 很容易求出圓心角 OCN (圖 4) 的弧度了, 也就是 $\angle OCN = \frac{\widehat{ON}}{R} = x \frac{2\pi R}{h} \div R = \frac{2\pi x}{h}$. 再說在直角三角形 OQN 里, 已知斜邊 $CN = R$ 和銳角 $OCN = \frac{2\pi x}{h}$, 可以求出直角邊 NQ :

$$NQ = CN \sin \angle OCN = R \sin \frac{2\pi x}{h}.$$

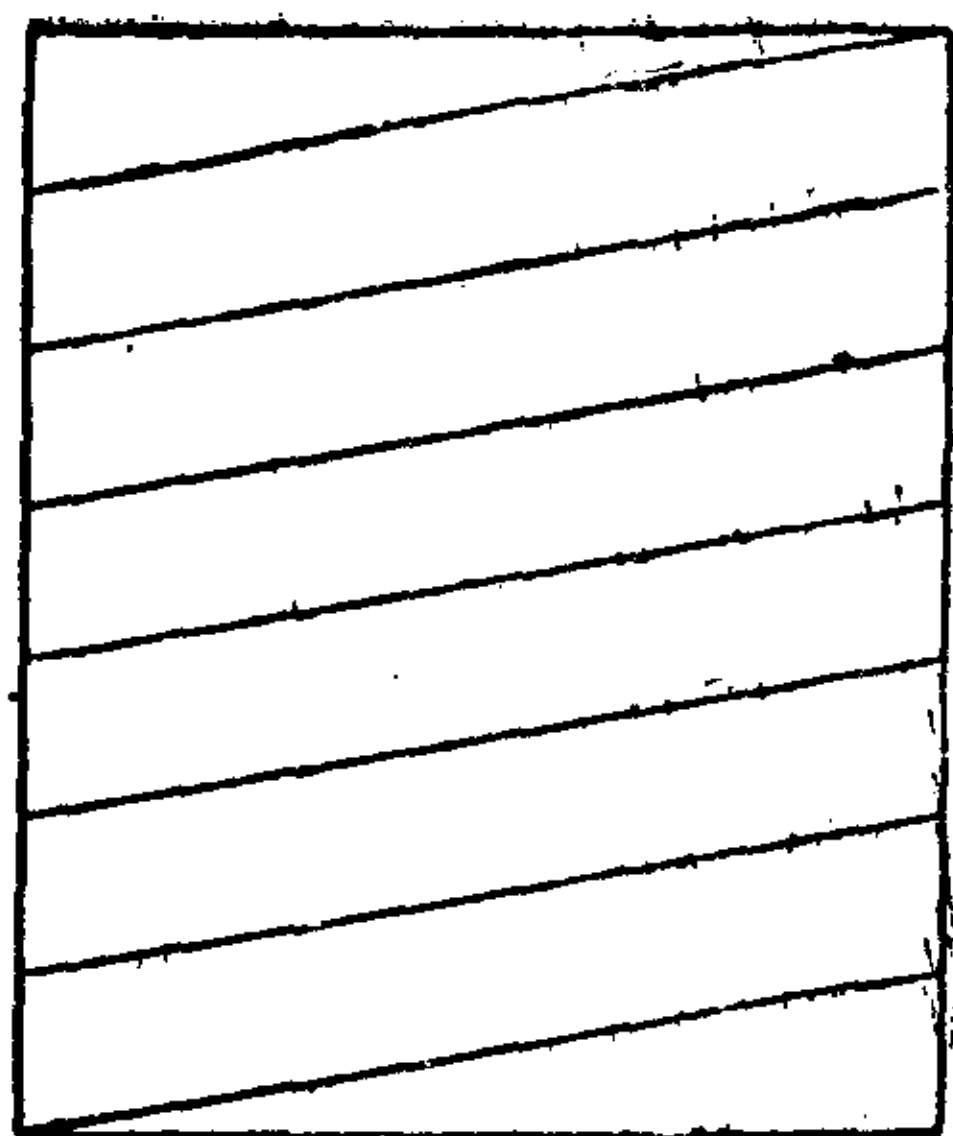


图 6.

因为 $NQ = y$, 所以

$$y = R \sin \frac{2\pi x}{h},$$

也就是說, 螺旋綫的射影是一
条正弦曲綫.

假如把上面刻有螺旋綫
的圓柱面沿它的某一条母綫切
开, 然后攤在平面上, 那么在展
开面上螺旋綫就成一組互相平
行和等距离的斜綫段(图 6).

現在, 我們来解这样一个

問題.

假如在圓柱面上 F 点停着一只蜘蛛, 在 G 点停着一只蒼
蝇(图 7).

請問, 蜘蛛沿着哪条路綫向蒼蝇爬去路程最短——
 FIG 、 $FII G$ 或 $FIII G$ 呢, 还是沿着其他連接 F 点和 G 点的
路綫?

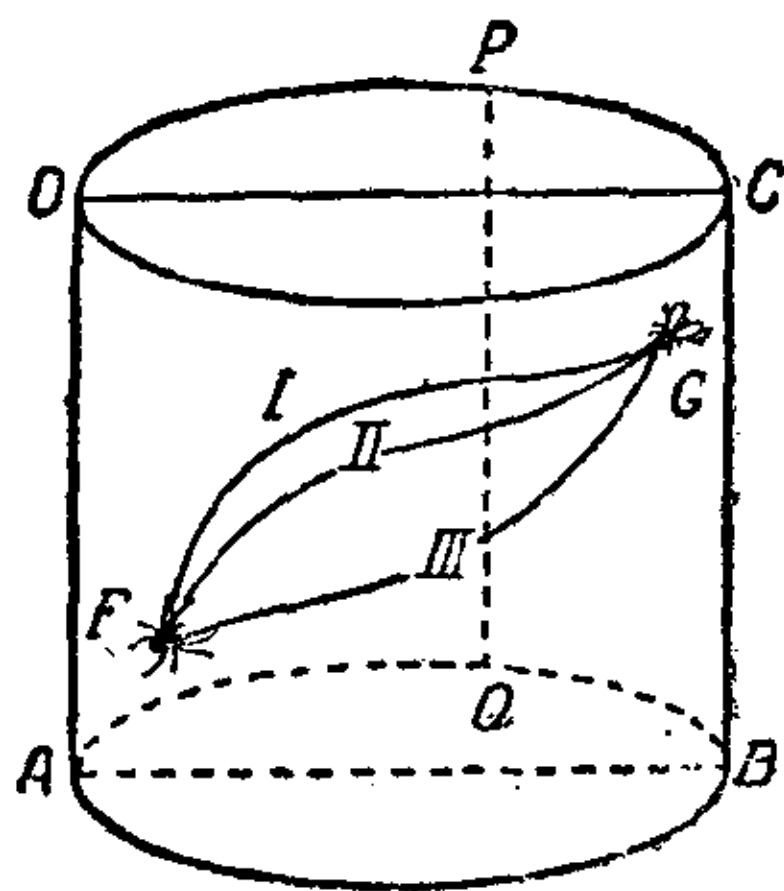


图 7.

在解答問題時，我們把下列情況除外，就是當 F 點和 G 點在同一條母綫上，或者在垂直於圓柱的軸的平面上的一个圓周上。很容易看出，在第一种情況下，最短的路綫是沿着这一段母綫爬；在第二種情況下，是沿着圓周的劣弧爬。

設通過圓柱軸的平面 $ABCD$ 把圓柱分隔成兩半，使蜘蛛和蒼蠅在同一半圓柱上。然後，沿着另一半上的某一條母綫 PQ 把圓柱面切開，現在我們轉到这个展開面上去研究(圖8)。

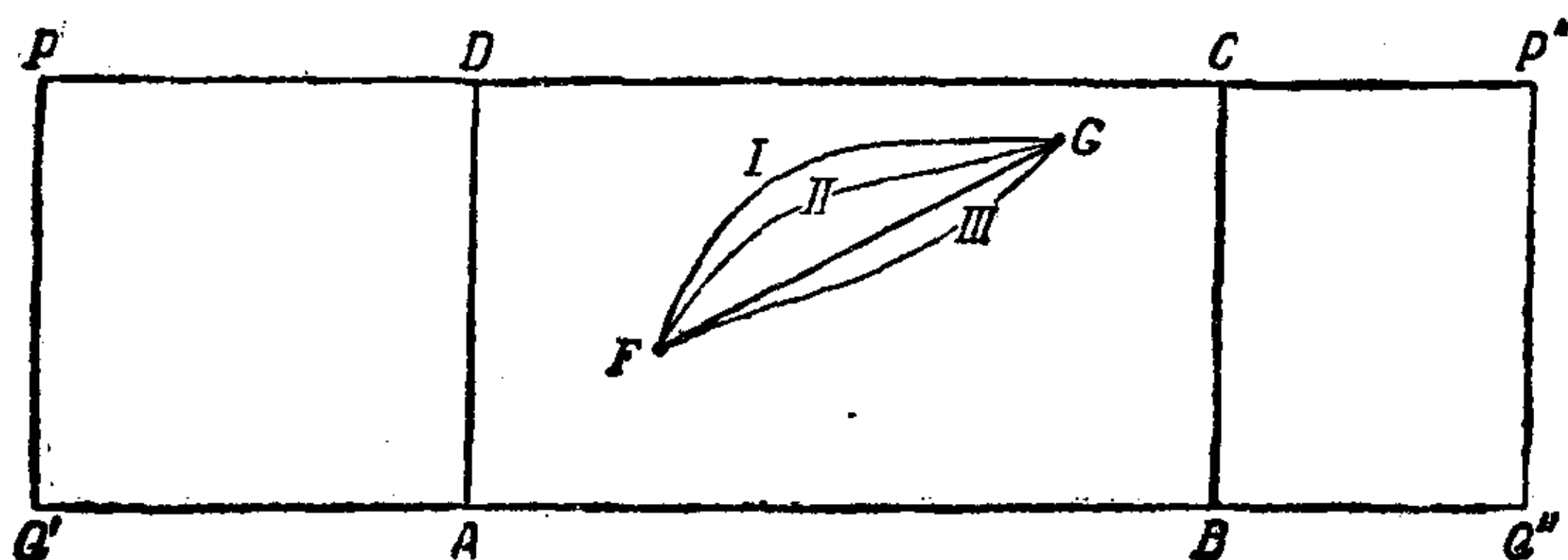


圖 8.

在平面上，兩點間的最短路綫是通過這兩點的一段直綫；因此引直綫 FG ，並且把矩形 $P'Q'Q''P''$ 重新卷成圓柱。在這種情況下，綫段 FG 並不改變長度，却變成了一段螺旋綫。因此，在圓柱面上的最短路綫是螺旋綫。所以，蜘蛛應該沿着連接 F 和 G 的螺旋綫向蒼蠅爬去。

但是，並不是所有通過 F 點和 G 點的螺旋綫都是最短的路綫；經過 F 點和 G 點可以引無限多的螺旋綫，它們在 F 點和 G 點之間圈數不同，方向也不一樣（圖 9 是其中的幾個例子）。

然而，這些螺旋綫段都不是上述問題所要求的答案。

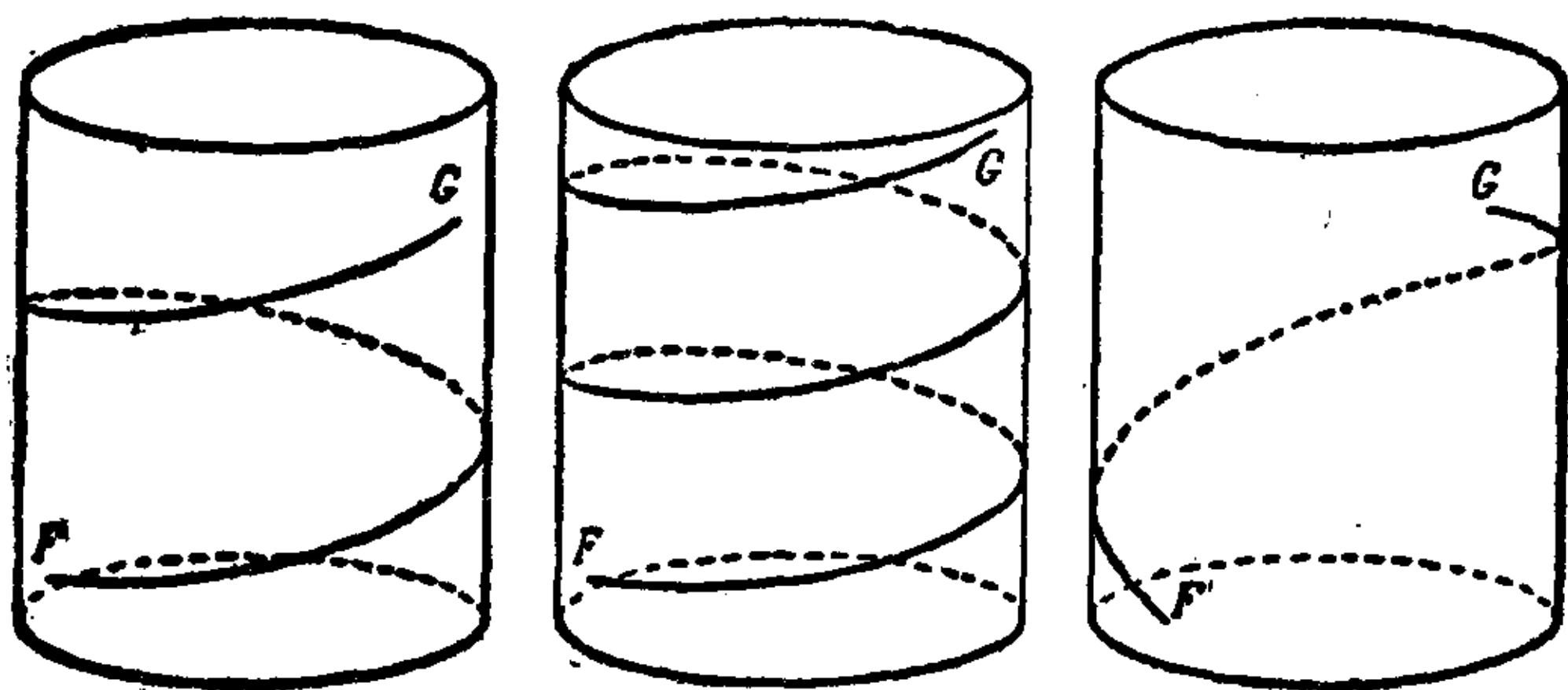


图 9.

螺旋綫、母綫、垂直于圓柱軸的截面上的圓都是直圓柱上的測地綫^①，它們就好象平面上的直綫和球上的大圓一樣。这儿應該指出，虽然在曲面上（例如在圓柱上）最短的綫是測地綫，而測地綫并不一定都是最短的綫（就象我們知道的，圓柱上兩点之間可以引出一些螺旋綫，它們并不是最短的綫）。

二

在这一节里，我們要討論用平面截圓柱所得的截綫。

我們先来談談叫做橢圓的曲綫。橢圓是平面上到兩定点的距离的和等于常量而且大于這兩点之間的距离的点的軌迹。這兩個定点叫做橢圓的焦点（在图 10 上，焦点用 F_1 和 F_2 来表示，点 M 、 M_1 、 M_2 、 M_3 在橢圓上）。

根据上述的定义，很容易作出橢圓。把一条定長的綫的

^① 測地綫也叫短程綫。測地綫的理論是在高等数学課程——曲面論和变分法里研究的。

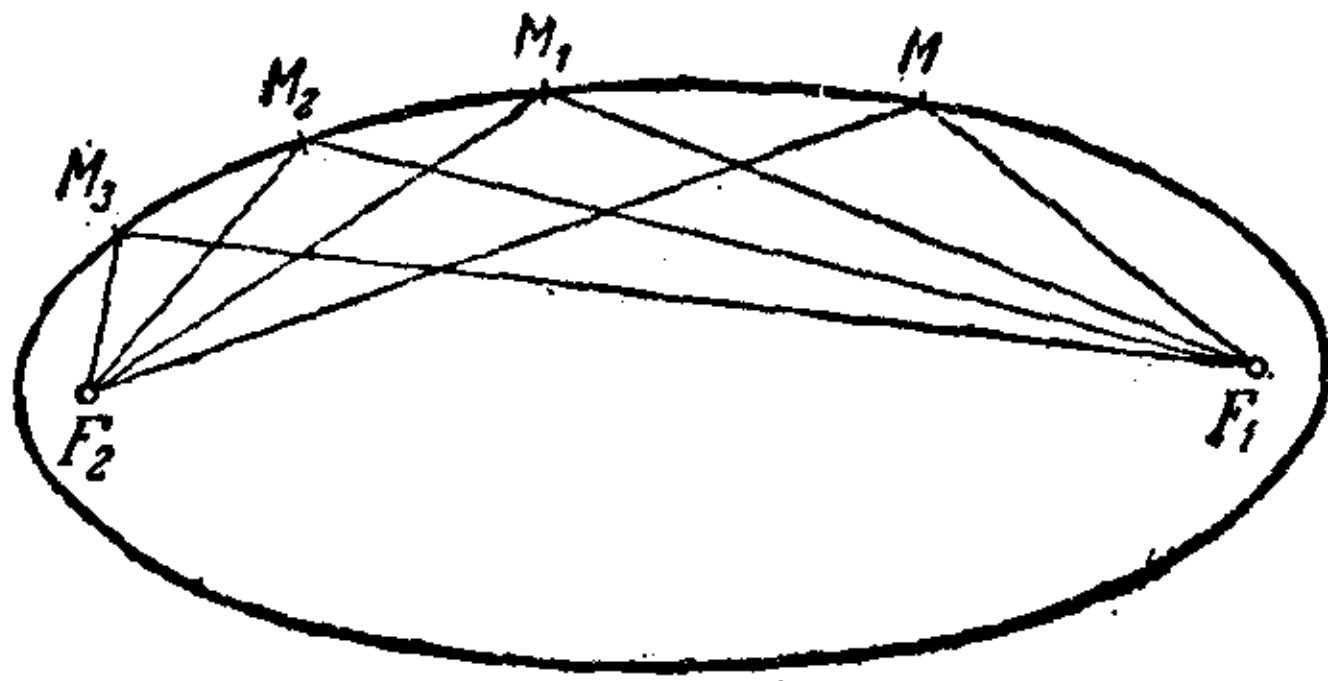


图 10.

兩头固定在兩個定点——焦点 F_1 和 F_2 上,然后用削尖的鉛筆把綫拉开,使鉛筆在紙上滑动并随时保持綫段張紧(图11). 这样做的結果就会描出一条閉合曲綫(为了得到閉合的曲綫,当綫碰到釘子的时候,可以把綫拿到另一边去),这条閉合曲綫是一个橢圓,因为,这条曲綫上的任意一点到 F_1 和 F_2 兩点的距离的和等于常量,也就是等于这段綫的長.

圓可以看做是橢圓的一种特殊情况. 当 F_1 和 F_2 兩点重合的时候,就得到圓.

現在我們分別确定用平面截圓柱所得的各种截綫如下:

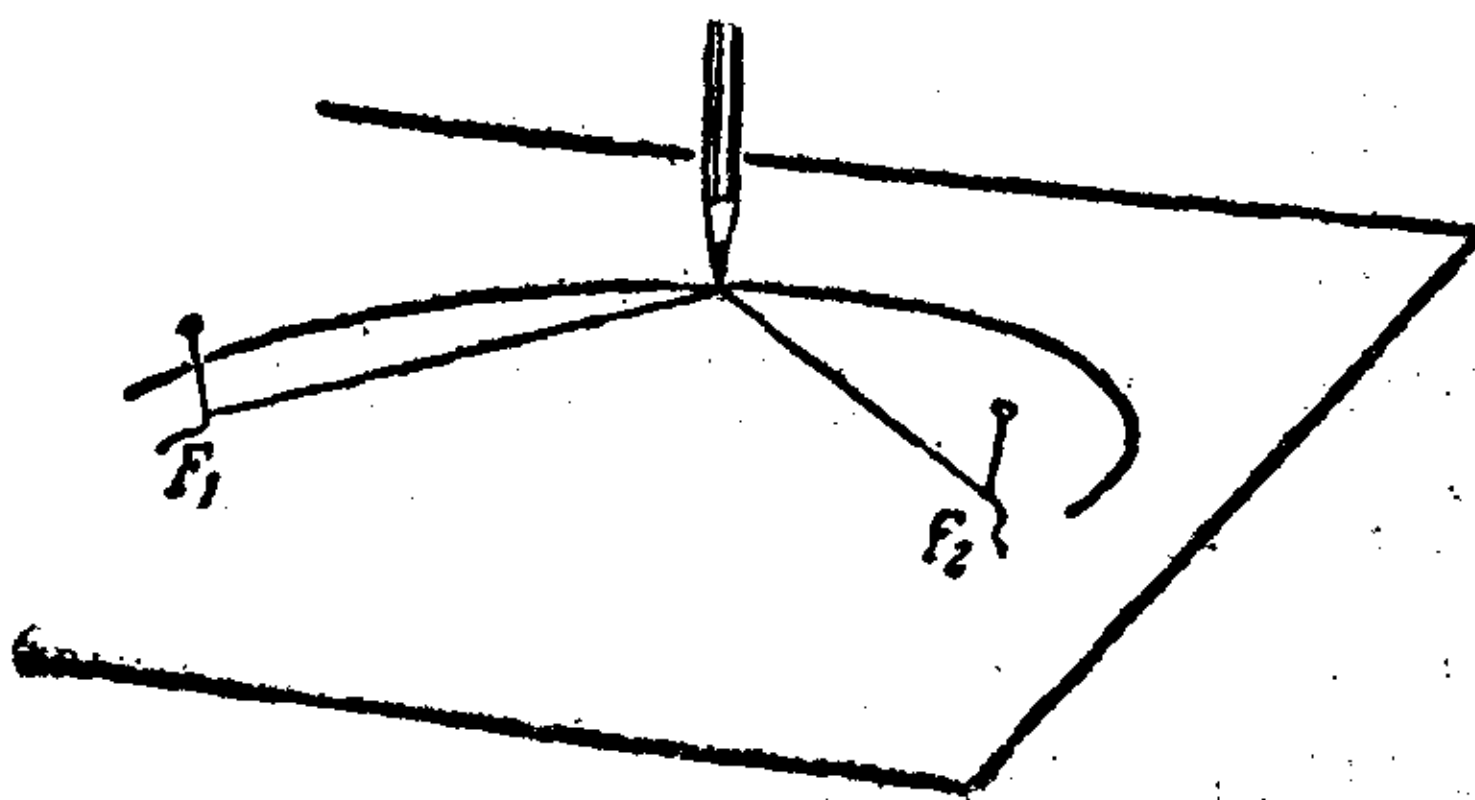


图 11.

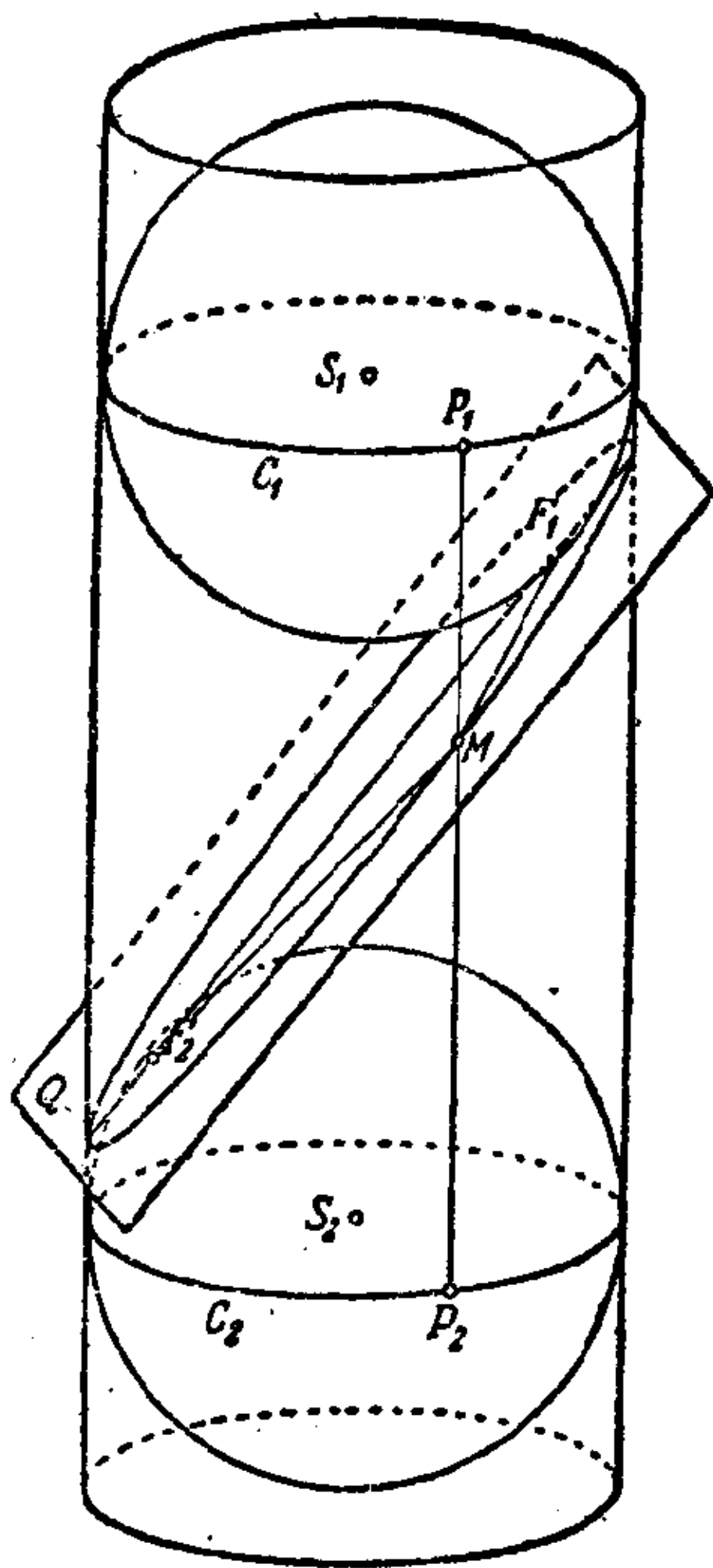


图 12.

1, 假如截面平行于圆柱的母綫, 那么得到的截綫是兩条平行綫;

2, 假如截面垂直于圆柱的軸, 那么得到的截綫是一个圓;

3, 假如截面不垂直于軸, 也不平行于母綫, 那么得到的截綫是一个橢圓.

头两个論断是很明显的, 我們来証明第三个.

假設 Q 是一个截面, S_1 和 S_2 是两个球, 它們在截面的兩边內接于圆柱(图 12), 分別切截面于 F_1 和 F_2 . S_1, S_2 兩球和圆柱相切的两个圓, 用 C_1 和 C_2 来表示. 在截綫上取任意点 M ; 并經過这个

点引一条母綫. 用 P_1P_2 来表示圓 C_1 和 C_2 之間的一段母綫.

應該指出, 不管 M 点在截綫上任何地方, 綫段 P_1P_2 的長度总是一样的.

然后把 M 点和 F_1, F_2 兩点連接. 因为截面 Q 同时切于球 S_1 和 S_2 , 所以綫段 MF_1 和 MF_2 是从 M 点分別引向球 S_1 和 S_2 的切綫.

此外, 母綫的一段 MP_1 切球 S_1 于 P_1 点, MP_2 切球 S_2 于 P_2 点. 但是, 从同一点引向同一个球的切綫段長度相等; 所

以 $MF_1 = MP_1, MF_2 = MP_2$.

把这两个等式加起来,得

$$MF_1 + MF_2 = P_1P_2.$$

这样,我们就得到了:从截线上任意一点到 F_1 和 F_2 两点的距离的和是一个常量,因此,这条截线是一个椭圆,它的焦点是 F_1 和 F_2 .

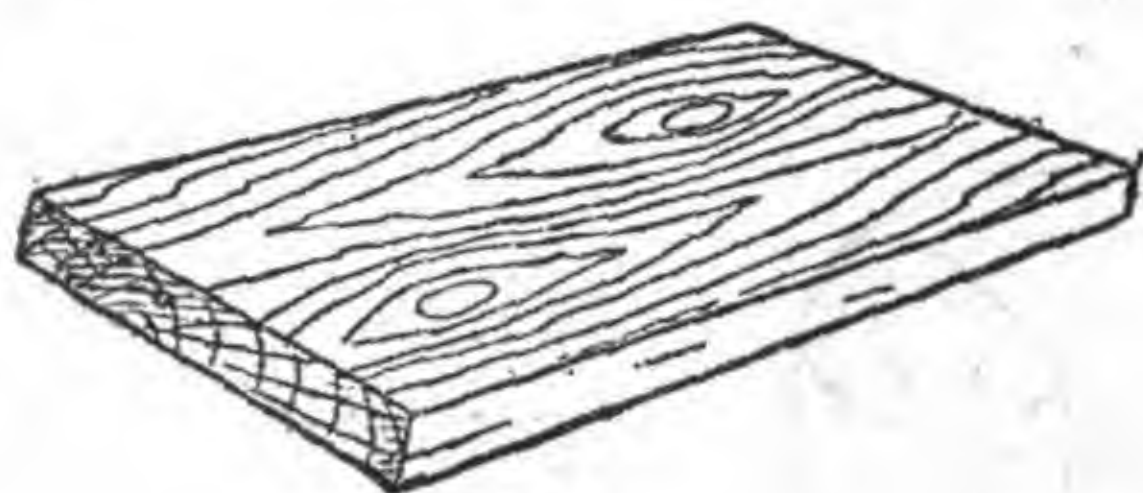


图 13.

刚才讨论的圆柱截面的几何性质,在我们周围的现实里也常常会碰到.例如,木板上的切平的节是椭圆形的,这就是因为木节本身是圆柱形的缘故.

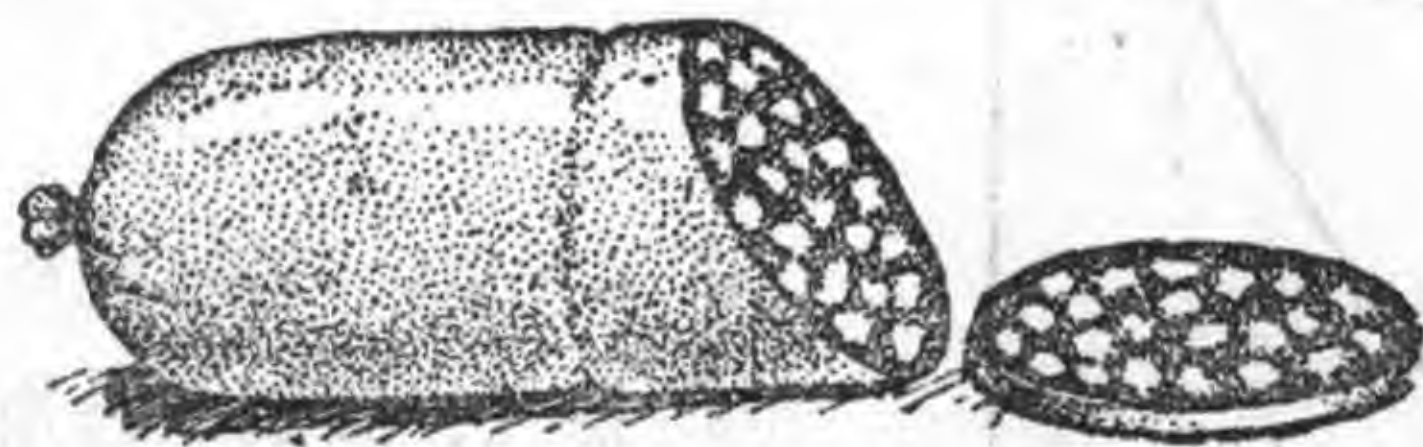


图 14.

根据同样的道理,切下来的香肠片也是椭圆形的.

太阳光通过圆孔进入暗室,在地板上也会形成椭圆形的光点.

椭圆是一种极重要的曲线.在技术上为了造成非匀速的转动,就利用椭圆形的齿轮.在大炮射击的理论里,椭圆也具

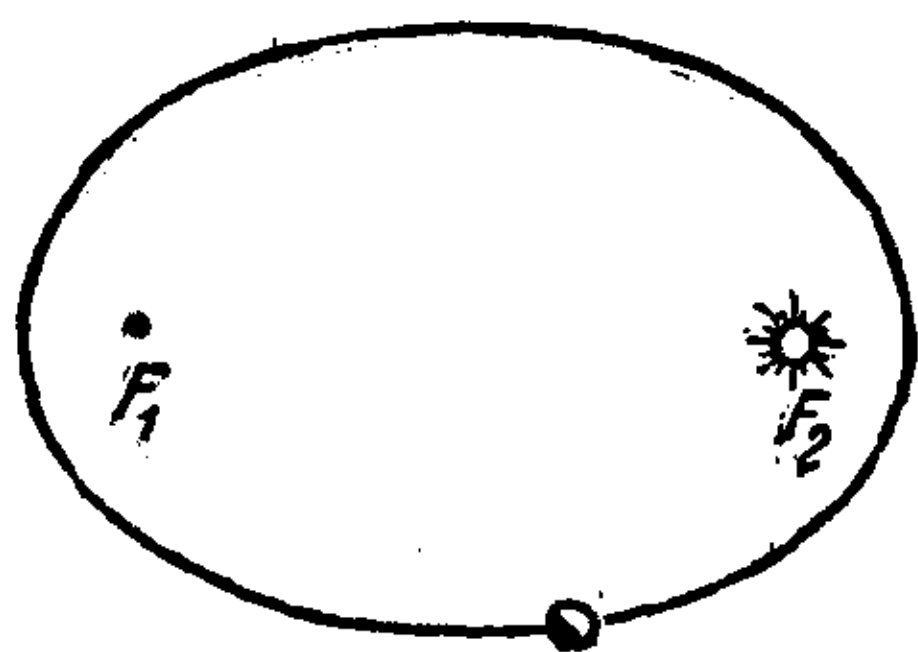


图 15.

有重要的意义(炮弹爆散时成椭圆). 太阳系的所有行星, 包括我们的地球在内, 都是沿着椭圆绕太阳运动的; 太阳就处在椭圆的一个焦点上(图 15).

三

在第一节里我们已经讲过, 螺旋线在圆柱在平面上的展开面上形成一些平行的线段. 现在我们来说明, 用平面截圆柱所得的截线在展开面上是什么样子的. 很明显, 当截线是两条平行线或者一个圆的时候, 在展开面上也是两条平行线或者一条直线段.

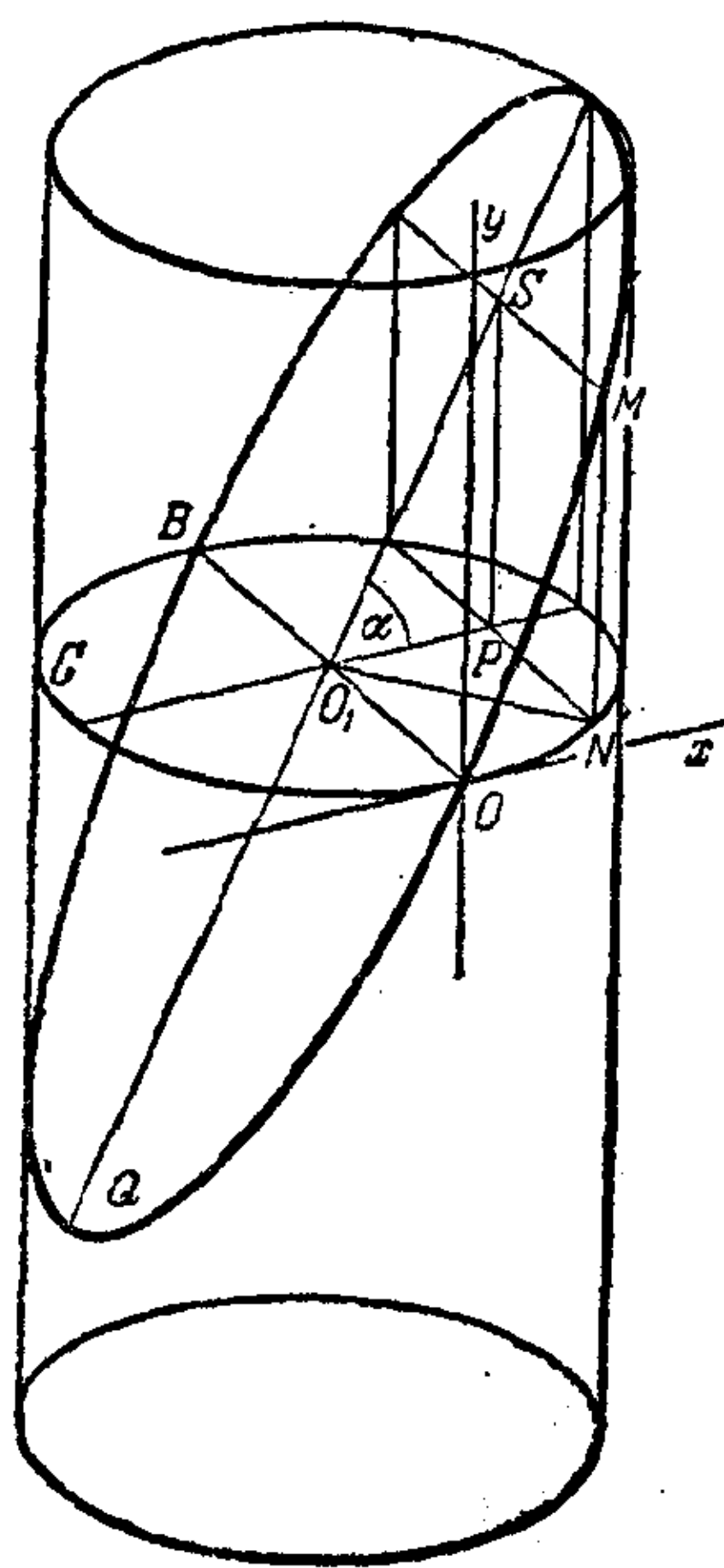


图 16.

现在看一看当截线是椭圆时候的情况. 设圆 C 是用垂直于圆柱的轴的平面截圆柱所得的截线, 过圆 C 的直径 OB 作截面 Q , 使平面 Q 和圆的平面所夹的角 α 不等于 0 , 也不等于 $\frac{\pi}{2}$ (图 16).

在切圆柱于经过 O 点的母线上的一个平面上确立坐标系, 坐标的原点是 O , Ox 轴是在 O 点和圆 C 相切的切线, 而

Oy 軸是过 O 点的一条母綫。假如使圓柱在 xOy 平面上沒有滑动地滾动, 使圓 C 沿着 x 軸滾动, 那么平面 Q 截圓柱所得的截綫橢圓在平面 xOy 上的印迹就是我們想要确定它的形式的一条曲綫。

在橢圓上取任意一点 M (图 16), 而 MN 是橢圓和圓 C 之間的一段母綫。然后經過綫段 MN 引平行于直徑 OB 的平面 $MNPS$ 。在平面 xOy 上, 綫段 MN 是所討論的曲綫上 M 点的縱坐标 y , 而弧 \widehat{ON} 的長度是它的橫坐标 x 。圓心角 NO_1O 的弧度等于 $\frac{x}{R}$ (R 是圓柱的半徑)。从直角三角形 $PN O_1$ 知道, 直角边 $O_1P = R \sin \frac{x}{R}$ 。从直角三角形 $PS O_1$ 求直角边 SP : $SP = R \sin \frac{x}{R} \operatorname{tg} \alpha$, 而 $SP = MN = y$, 所以

$$y = R \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{x}{R}.$$

最后的等式說明, 所討論的曲綫是振幅等于 $R \operatorname{tg} \alpha$ 的正弦曲綫。

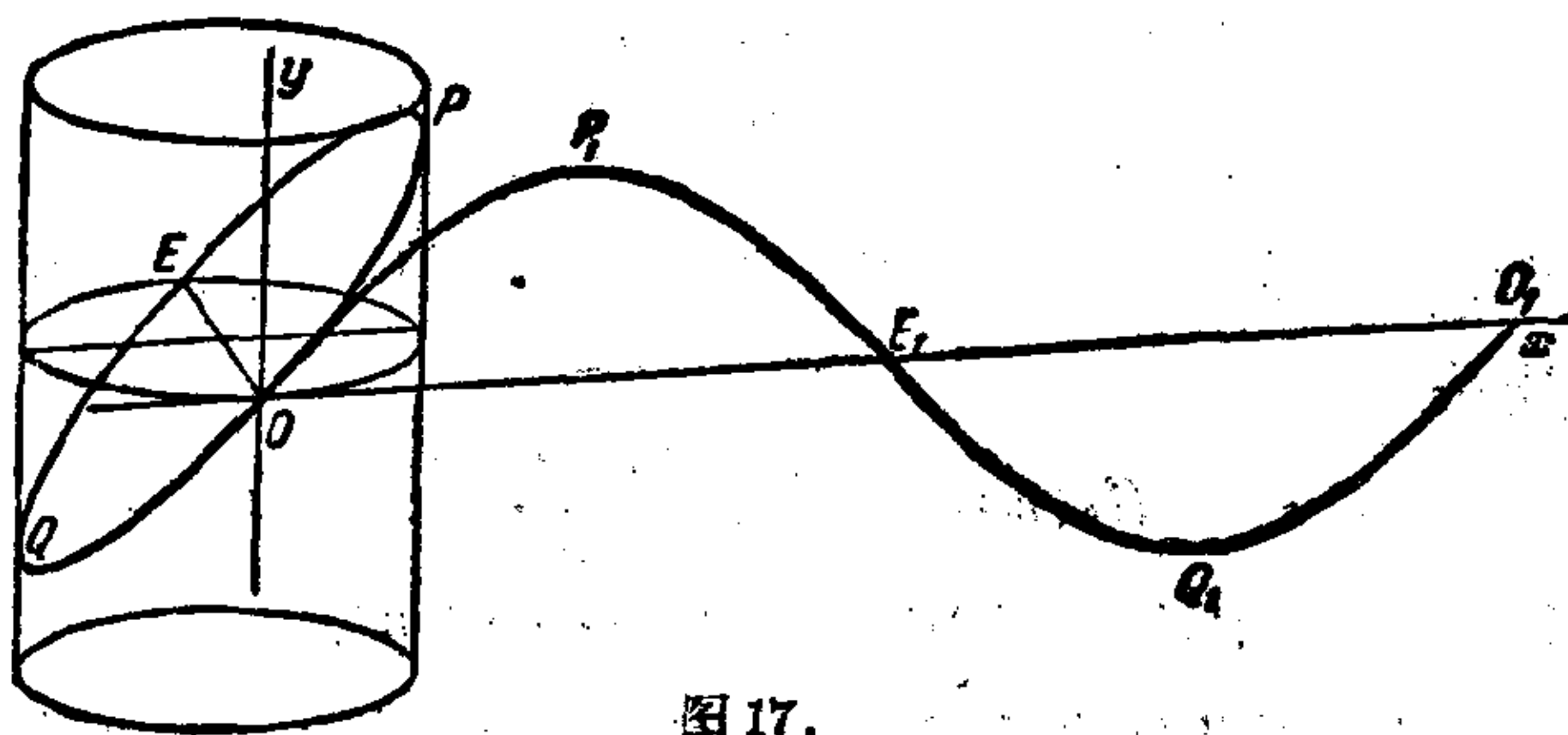


图 17.

以上所說的都在图 17 上表明着。圓柱在平面 xOy 上沒有滑动地往右边滾动; 这时候橢圓 $OPEQ$ 就“展开”成正弦曲

綫 $OP_1E_1Q_1O_1$. 这种事实在制造爐子烟囱的弯管的时候就会用到. 在制造烟囱弯管的时候, 鉄板是沿着曲綫 $y = R\sin x$ 切割的, 因为弯管弯成直角 ($\alpha = 45^\circ$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$). 在生产上都采用現成的正弦曲綫样板.

四

現在, 我們来討論求圓柱某些部分的体积的問題.

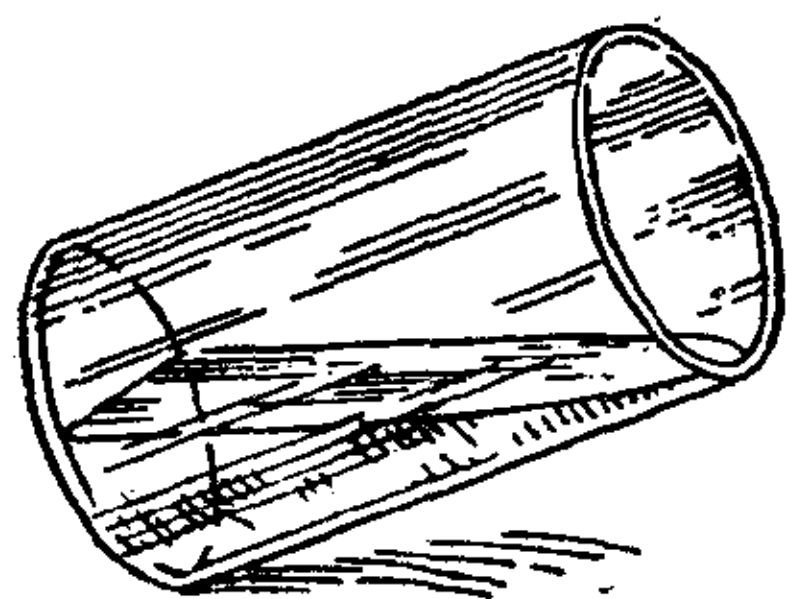


图 18.

有一个直圓柱形的容器(底半徑是 R , 高是 H), 裝滿了水. 然后把这个容器傾斜, 使一部分水流出来, 并使水流出到容器底剛好露出一半为止. 求余下的水的体积 V .

为了解答上面的問題, 我們需要用到自然数列前 n 項的平方和的公式. 設

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2;$$

求証

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

因为以后需要用到, 順便导出求自然数列前 n 項立方和的公式, 就是

$$S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

这里

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

我們采用几何学方法来証明这两个公式. 把加数各項 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ 看做正方形的面积, 它們的边分別等于 $1, 2, 3, \dots, n$, 而和 $S_2(n)$ 可以看做是由这些正方形組成的图形的

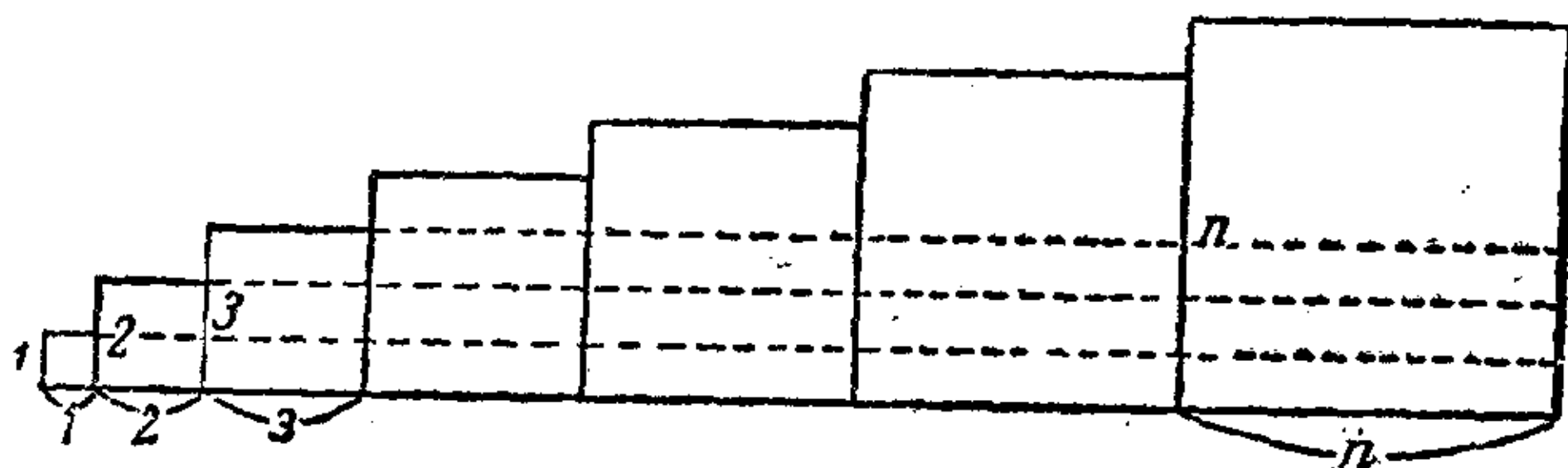


图 19.

面积(图 19)。

我們把这个图形切成一些寬等于 1 的長条;把这些長条的面积加起来,就可以得到图形的面积。从下面算起,第一个長条的面积是 $1+2+3+4+\cdots+n$; 第二个長条的面积是 $2+3+4+\cdots+n$ 等等。这样,可以把 $S_2(n)$ 表示如下:

$$S_2(n) = (1+2+3+\cdots+n) + (2+3+4+\cdots+n) \\ + (3+4+\cdots+n) + \cdots + n.$$

各个括弧內应用等差級数求和的公式,得到:

$$S_2(n) = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+2)(n-1)}{2} + \frac{(n+3)(n-2)}{2} \\ + \frac{(n+4)(n-3)}{2} + \cdots + \frac{(n+n)[n-(n-1)]}{2} \\ = \frac{n^2+n-0\cdot 1}{2} + \frac{n^2+n-1\cdot 2}{2} + \frac{n^2+n-2\cdot 3}{2} + \frac{n^2+n-3\cdot 4}{2} \\ + \cdots + \frac{n^2+n-(n-1)n}{2}.$$

根据公式 $(k-1)k = k^2 - k$ 来看各个分式的分子的第三項,把 $S_2(n)$ 改写成

$$S_2(n) = \frac{1}{2}[n(n^2+n) + 1-1^2 + 2-2^2 + \cdots + n-n^2] \\ = \frac{1}{2}[n(n^2+n) + (1+2+\cdots+n) - (1^2+2^2+\cdots+n^2)].$$

而这个式子又可以写成：

$$S_2(n) = \frac{1}{2} \left[n(n^2 + n) + \frac{(n+1)n}{2} - S_2(n) \right].$$

因此

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (3)$$

为了导出自然数列前 n 项立方的和的公式，我們看一看这样的 n 个正方形，它们的边的尺寸是：第一个正方形的边长是 1，第 2 个是 $1+2$ ，第 3 个是 $1+2+3$ ，……，最后，第 n 个正方形的边长是 $1+2+3+\cdots+n$ 。

把这些正方形象图 20 上那样放在一个平面上。那么， $OA_1=1$ ， $OA_2=1+2$ ， $OA_3=1+2+3$ ，……， $OA_{n-1}=1+2+3+\cdots+(n-1)$ ， $OA_n=1+2+3+\cdots+n$ 。同时：

$$OA_1=1, A_1A_2=2, A_2A_3=3, \cdots, A_{n-1}A_n=n.$$

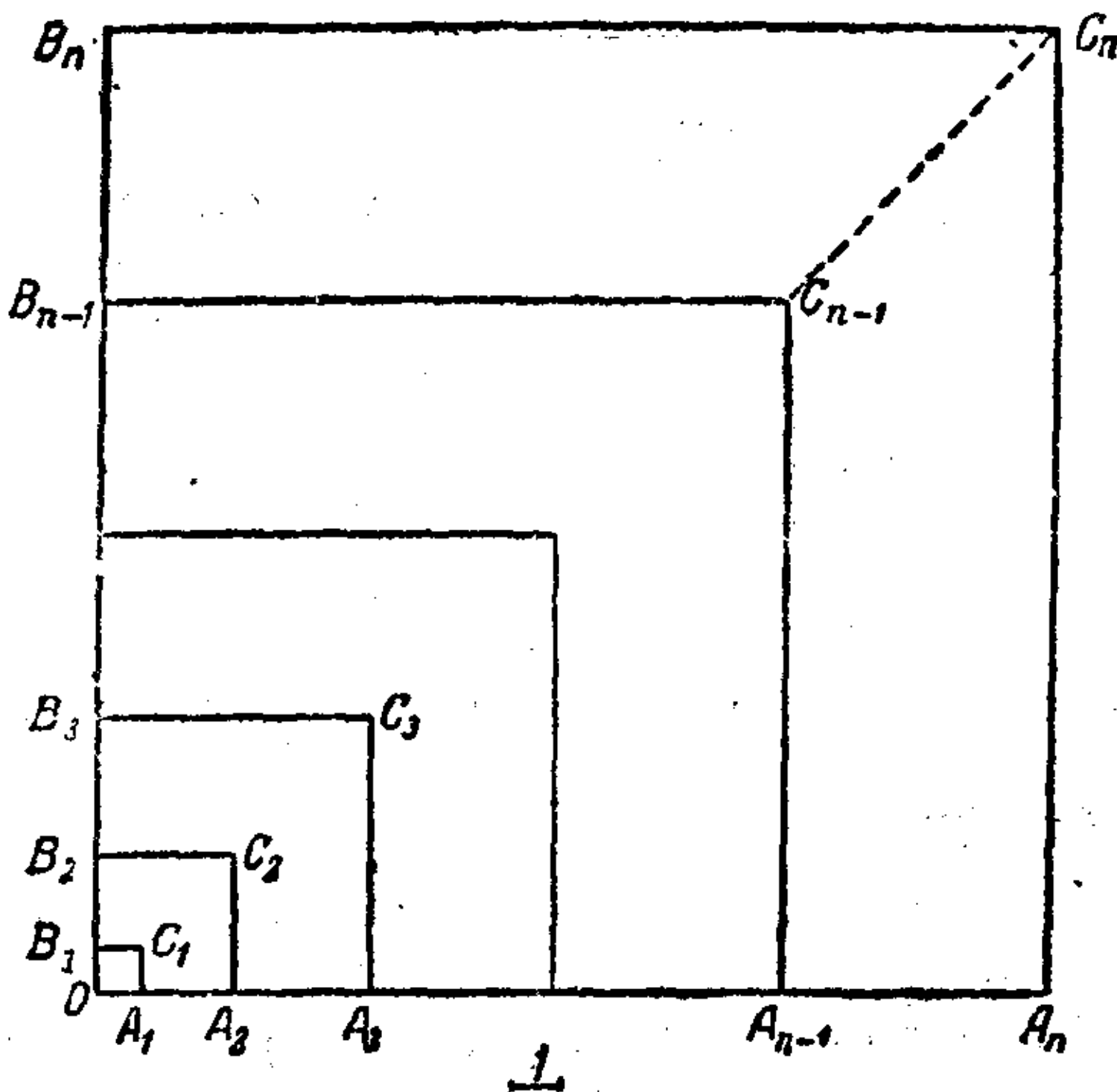


图 20.

現在我們求图形 $B_n C_n A_n A_{n-1} C_{n-1} B_{n-1}$ 的面积 σ_n . 連結 C_n 和 C_{n-1} , 把图形分成兩個相等的直角梯形. 我們研究其中的一个, 例如梯形 $C_{n-1} C_n A_n A_{n-1}$; 它的面积等于

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{A_n C_n + A_{n-1} C_{n-1}}{2} A_{n-1} A_n.$$

但是

$$A_n C_n = O A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

$$\text{同样, } A_{n-1} C_{n-1} = O A_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

因此,

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \right] n,$$

化簡以后, 得:

$$\frac{\sigma_n}{2} = \frac{1}{2} n^3,$$

而图形 $B_n C_n A_n A_{n-1} C_{n-1} B_{n-1}$ 的面积等于 n^3 .

按同样的方法, 可以求得图形 $B_{n-1} C_{n-1} A_{n-1} A_{n-2} C_{n-2} B_{n-2}$ 的面积 σ_{n-1} 等于 $(n-1)^3, \cdots$, 图形 $B_3 C_3 A_3 A_2 C_2 B_2$ 的面积 σ_3 等于 3^3 , 图形 $B_2 C_2 A_2 A_1 C_1 B_1$ 的面积 σ_2 等于 2^3 , 此外, 正方形 $O B_1 C_1 A_1$ 的面积 σ_1 等于 1^3 .

因此正方形 $O B_n C_n A_n$ 的面积等于

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \cdots + \sigma_{n-1} + \sigma_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

而另一方面这个面积也等于

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2,$$

也就是

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2. \quad (4)$$

我們記得, 在中学課本里公式(3)是用另一种方法求得

的。

現在我們可以開始解答這一節開頭提出的問題了。用 α 來代表流剩下來的事體的表面和圓柱的底所夾的角(圖 21)，那麼

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R}. \quad (5)$$

再說，因為圓柱盛滿水的那一部分有一個對稱的平面 OLM (圖 21)，所以只要求出 $OLMA$ 的體積再乘 2 就行了。

把圓柱的底半徑 OA (圖 22) 分成 n 等分，分點是

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}.$$

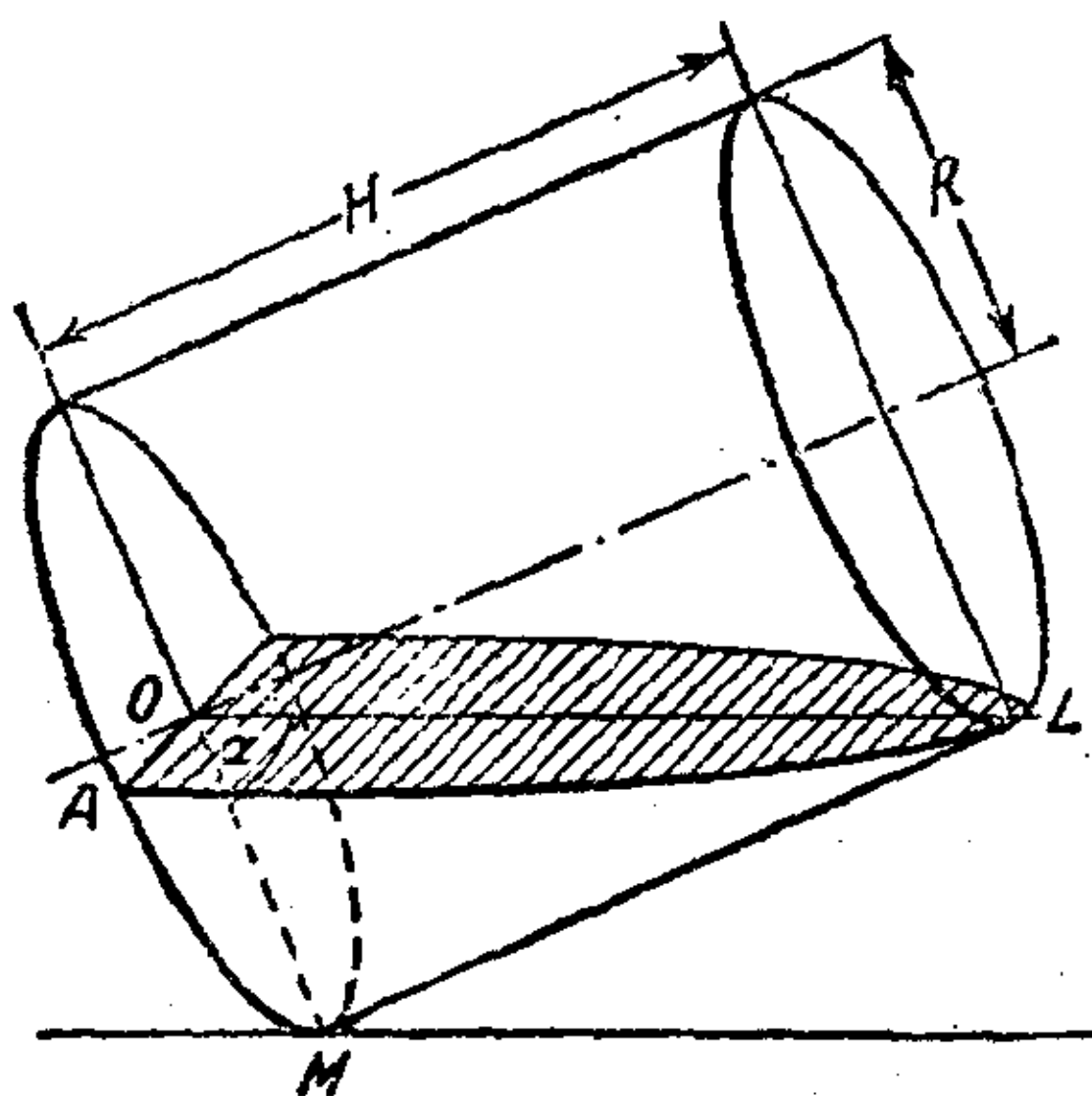


圖 21.

為了統一起見，我們用 A_0 來代表 O ，用 A_n 來代表 A 。任何相鄰兩點的距離都等於 $\frac{R}{n}$ 。經過分點引垂直於半徑 OA 的平面，這些平面把立體 $OLMA$ 分成了 n 層。假如能夠把這些層的體積分別求出，那麼，把它們加起來，我們就得到了要求

出的体积。现在来看看夹在经过 A_{k-1} 点和 A_k 点的两个平面中间的那一层。

把半径 OA 分得越小(也就是 n 越大),越可以把第 k 层看做三棱柱。这样,把第 k 层看做三棱柱,我们来求它的体积。三棱柱的高(就是这一层的厚)等于 $A_{k-1}A_k$,也就是等于前面指出的 $\frac{R}{n}$ 。而三棱柱的底面积等于直角三角形 $A_k B_k C_k$ 的面积($\angle B_k$ 是直角),也就是等于 $\frac{1}{2} A_k B_k \cdot B_k C_k$ 。

但是根据(5), $B_k C_k = A_k B_k \operatorname{tg} \alpha = A_k B_k \frac{H}{R}$;
所以第 k 层三棱柱的体积等于

$$\frac{1}{2} (A_k B_k)^2 \frac{H}{R} \cdot \frac{R}{n} = \frac{1}{2} (A_k B_k)^2 \frac{H}{n}.$$

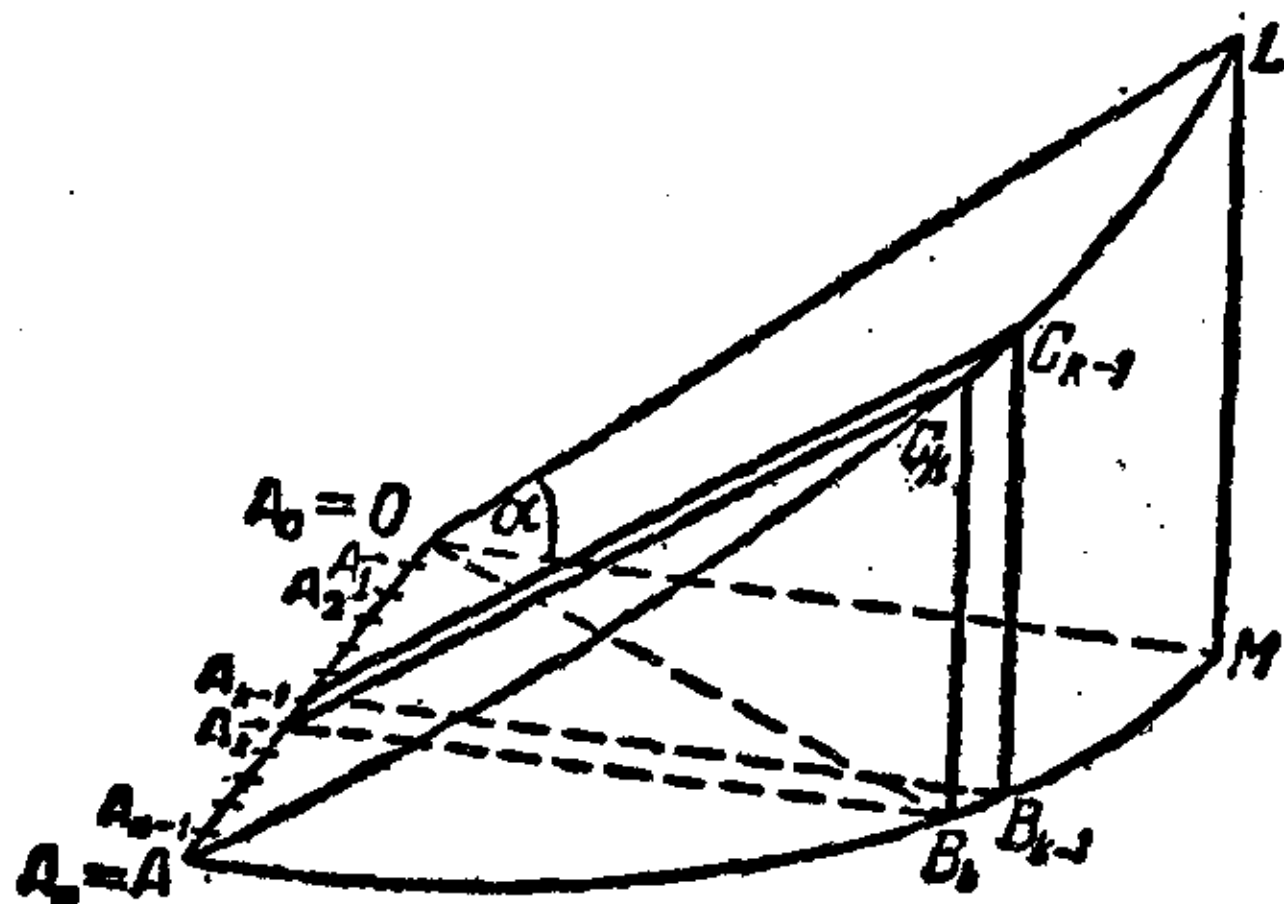


图 22.

从直角三角形 $OA_k B_k$ 得到, $(A_k B_k)^2 = R^2 - (OA_k)^2$; 但是
因为 $OA_k = k \cdot \frac{R}{n}$, 所以 $(A_k B_k)^2 = R^2 - k^2 \frac{R^2}{n^2} = \frac{R^2}{n^2} (n^2 - k^2)$ 。

因此,第 k 层的体积近似地等于

$$\frac{R^2 H}{2n^3} (n^2 - k^2).$$

在这里,假定 k 依次等于 $1, 2, 3, \dots, n$, 求得第 1、第 2、……第 n 层的体积的近似值. 把它们都加起来,就得到 $OLMA$ 的体积的近似值,等于

$$\begin{aligned} & \frac{R^2 H}{2n^3} (n^2 - 1^2) + \frac{R^2 H}{2n^3} (n^2 - 2^2) + \frac{R^2 H}{2n^3} (n^2 - 3^2) + \dots \\ & + \frac{R^2 H}{2n^3} [n^2 - (n-1)^2] + \frac{R^2 H}{2n^3} (n^2 - n^2) \\ & = \frac{R^2 H}{2n^3} [n \cdot n^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)] \\ & = \frac{R^2 H}{2n^3} \left[n^3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{R^2 H}{2} \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \right]. \end{aligned}$$

我們記得 $OLMA$ 的体积只有所求的体积 V 的一半,所以可以列出近似的等式.

$$V \approx R^2 H \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \right].$$

正象已經指出的那样, n 的值越大,最后一个等式就越准确. 因此,为了求出 V 的确定值,我們求当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限值:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} R^2 H \left[1 - \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \right],$$

从这里得到

$$V = \frac{2}{3} R^2 H.$$

很有趣,在这个公式里沒有 π ; 而整个圓柱的体积,我們却知道得很清楚,是等于

$$\pi R^2 H.$$

五

我們来討論一个跟直圓柱有关的力学問題. 設有一个半

徑是 R 、高是 H 的圓柱繞着自己的軸作勻速的轉動，角速度是 ω 。圓柱是由均勻的質料做成的，密度等於 ρ 。求出轉動圓柱的動能。在許多技術問題上，常常會需要解這樣的題目。

從物理課本知道，運動速度是 v 的質點（質點就是體積可以忽略不計的質量）的動能等於 $\frac{mv^2}{2}$ 。

假設有一系列的質點，它們的質量等於 m_1, m_2, \dots, m_n ，它們的速度依次等於 v_1, v_2, \dots, v_n ，那麼點的整個系統的動能就等於各組成點的動能的和，也就是等於

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

假如在這些點裡面有一些點的速度的值相同（方向不一定相同），那麼這些點的總動能就等於這些點的質量的和、乘它們的速度的值的平方的一半。

圓柱轉動的時候，雖然角速度 ω 不變，跟軸距離不同的點的綫速度是不一樣的。點離軸漸近，速度漸趨於 0；而在圓柱面上的點速度最大。

但是，在距圓柱軸等遠的圓柱上的各點的綫速度的值却是相等的，為了求出速度 v 的值，可以利用公式

$$v = r \omega, \quad (6)$$

在這裡， r 是點到軸的距離。很明顯，所有這些點都在半徑是 r 的圓柱面上，這個圓柱面在原來那個圓柱裡面。

把圓柱底的半徑 OA （圖 23）分成 n 等分，分點是 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} ，同時跟前面一樣用 A_0 來代 O 點，用 A_n 來代 A 點。然後，經過這些分點作有共同軸 OO_1 的圓柱面，這些圓柱面把原來那個圓柱分成了 n 層。這些圓柱層的厚度，全都一樣，等

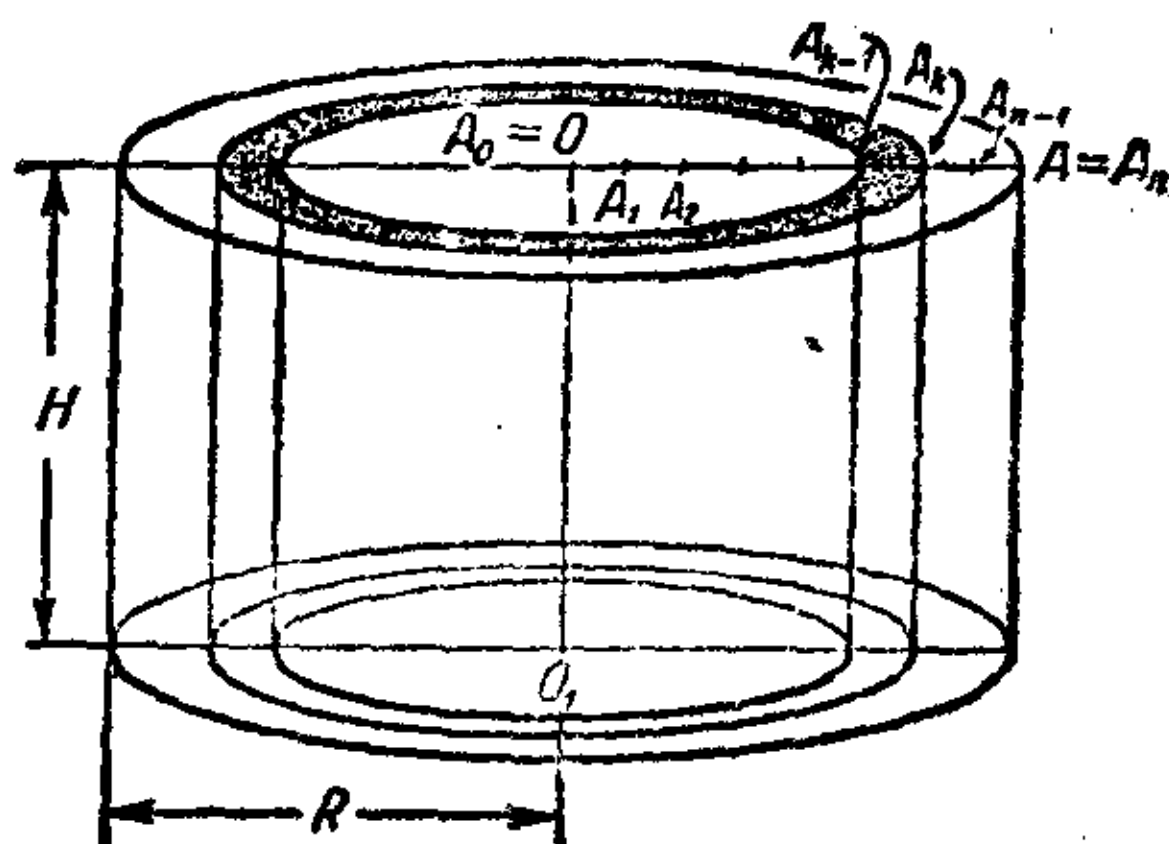


图 23.

于 $\frac{R}{n}$.

可以近似地把每一个圆柱层上的所有点的速度的值看做是相等的。这个论断当 n 越大的时候就越准确。因此应该这样进行：先近似地求出各个圆柱层的动能，并把得到的值加起来，结果就得到了整个圆柱的动能 E_n 的近似值。然后，利用极限的等式

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

求出动能 E 的值。

我们就照这个计划来解这个问题。

我们研究第 k 个圆柱层，它夹在经过分点 A_{k-1} 和 A_k 的两个圆柱面之间。这一层的外径等于线段 OA_k 的长，也就是等于 $k \frac{R}{n}$ ；内径 OA_{k-1} 的长是 $(k-1) \frac{R}{n}$ 。近似地认为，这一层里所有的点都有相同的速度值 v_k ，等于 A_k 点的速度，因此

$$v_k = OA_k \cdot \omega = k \frac{R}{n} \omega. \quad (7)$$

我们来近似地求出第 k 层的质量。为了这一点，我们用经过轴 OO_1 和某一条母线的平面把这一层切开。把这一层展

并,就得到了一个可以近似地看做平行六面体的几何体,它的高等于圆柱的高 H ,厚等于圆柱层的厚 $\frac{R}{n}$,而长等于底圆周的长 $2\pi \cdot OA_k = 2\pi k \frac{R}{n}$ (图 24).

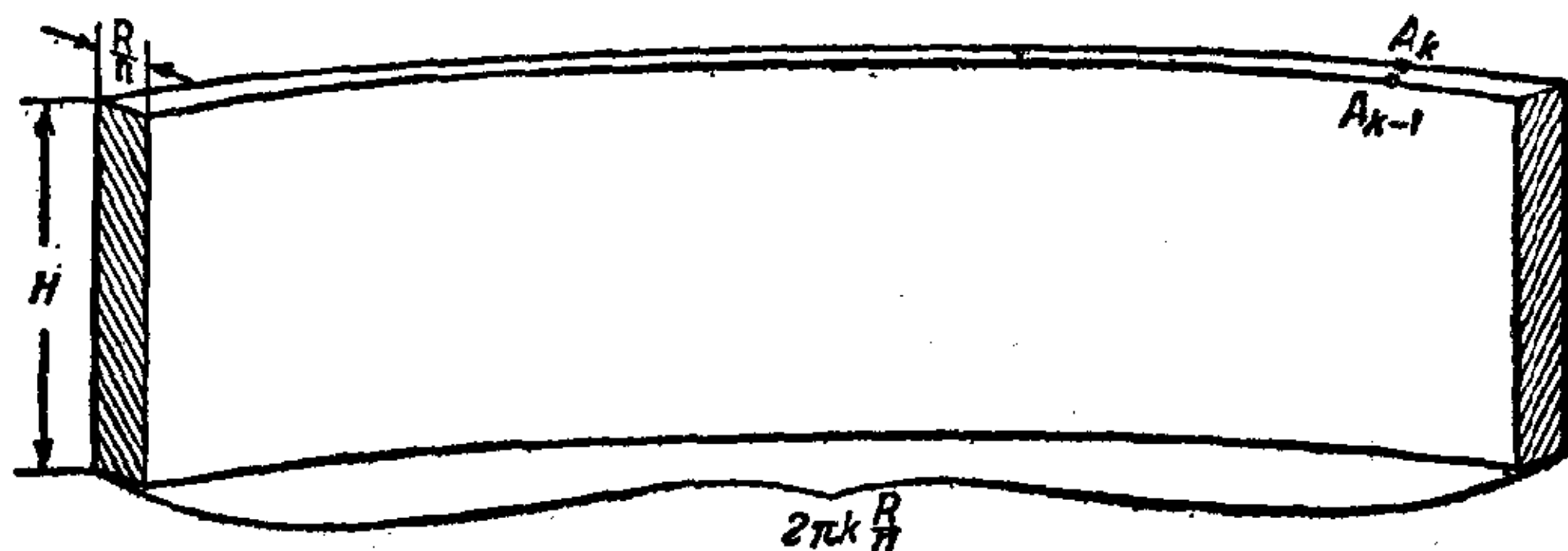


图 24.

这样,就容易求出第 k 个圆柱层的体积和质量的近似值:

$$m_k \approx \rho 2\pi k \frac{R}{n} H \frac{R}{n} = \frac{2\pi R^2 H \rho}{n^2} k. \quad (8)$$

那么根据(7)和(8),第 k 个圆柱层的动能是

$$\frac{m_k v_k^2}{2} \approx \frac{\pi R^2 H \rho}{n^2} k k^2 \omega^2 \frac{R^2}{n^2} = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2 k^3}{n^4}.$$

假定 k 等于 $1, 2, 3, \dots, n$,就相应地得到第1、第2、第3、……、第 n 层的动能;因此动能 E_n 的近似值可以从下面的等式求出:

$$E_n = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3).$$

最后,动能的准确值 E 等于

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3).$$

根据公式(4)用 $\left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2$ 来代 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$,那么

$$\begin{aligned} E &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{n^4} \left[\frac{(n+1)n}{2}\right]^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \end{aligned}$$

結果是

$$E = \frac{\pi R^4 H \rho \omega^2}{4}.$$

再有, 由于圓柱的質量 $M = \pi R^2 H \rho$, 因此所得到的公式可以改写成

$$E = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{\omega^2}{2}. \quad (9)$$

可以比較簡單地証明, 任何形狀的物体以角速度 ω 沿着某一条軸轉动时的动能公式:

$$E = J \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad (10)$$

在这里, J 叫做物体对于已知軸的轉动慣量.

比較一下公式(9)和(10), 很明显, 均匀的圓柱对于它的軸的轉动慣量是

$$J_{\text{H}} = \frac{MR^2}{2}.$$

关于公式(10)的詳細証明和轉动慣量的計算, 是在理論力学和高等数学里研究的.

六

有一个圓柱形的容器, 高是 H , 底半徑是 R , 母綫是豎直的, 里面盛滿着水. 在容器的圓底上有一个小孔, 孔的面积等于 σ , 水經過这个小孔流出来. 求水位从原来的值 H 降到 α 所需的时间 T_α , $0 < \alpha < H$. (量的單位都采用CGS制.)

解答問題的时候應該知道, 随着水位的降低, 小孔內的水压在逐漸減弱, 因此水流速度也在逐漸減小. 水流速度的变化使問題的解答大大地复杂起来.

假如水流速度不变(这是跟事实不符的), 利用算术就可

以很快地把問題解出来了。

为了解答这个问题,要用到求流速 v 的公式。这个公式在物理学里很容易推断出来,它的形式如下:

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (11)$$

在这里 h 是容器里的水位, g 是重力加速度。从这个公式可以看出,如果水位降低到 $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$, 那么流速 v 就降低到 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 。

假如 A 点(图 25)是在离容器底的高度等于 α 的地方, B 点是在高度等于 H 的地方,并且假定 A 点和 B 点同在圆柱轴上。把线段 AB 分成 n 段。在这个问题里,跟以前的问题不同,把线段 AB 分成 n 等分倒反而不方便,从下面我们就可以看到这一点。

假如点 A_1, A_2, \dots, A_{n-1} 把线段分割成 n 分,使分成的

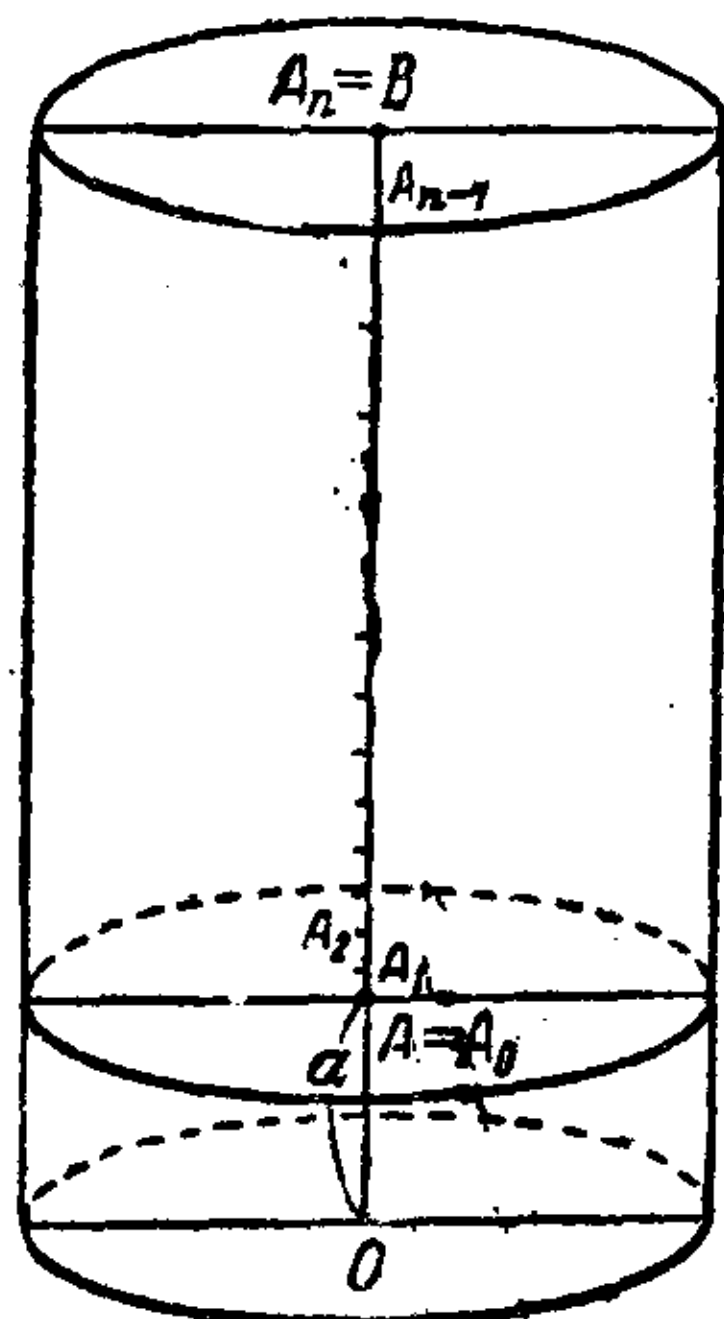


图 25.

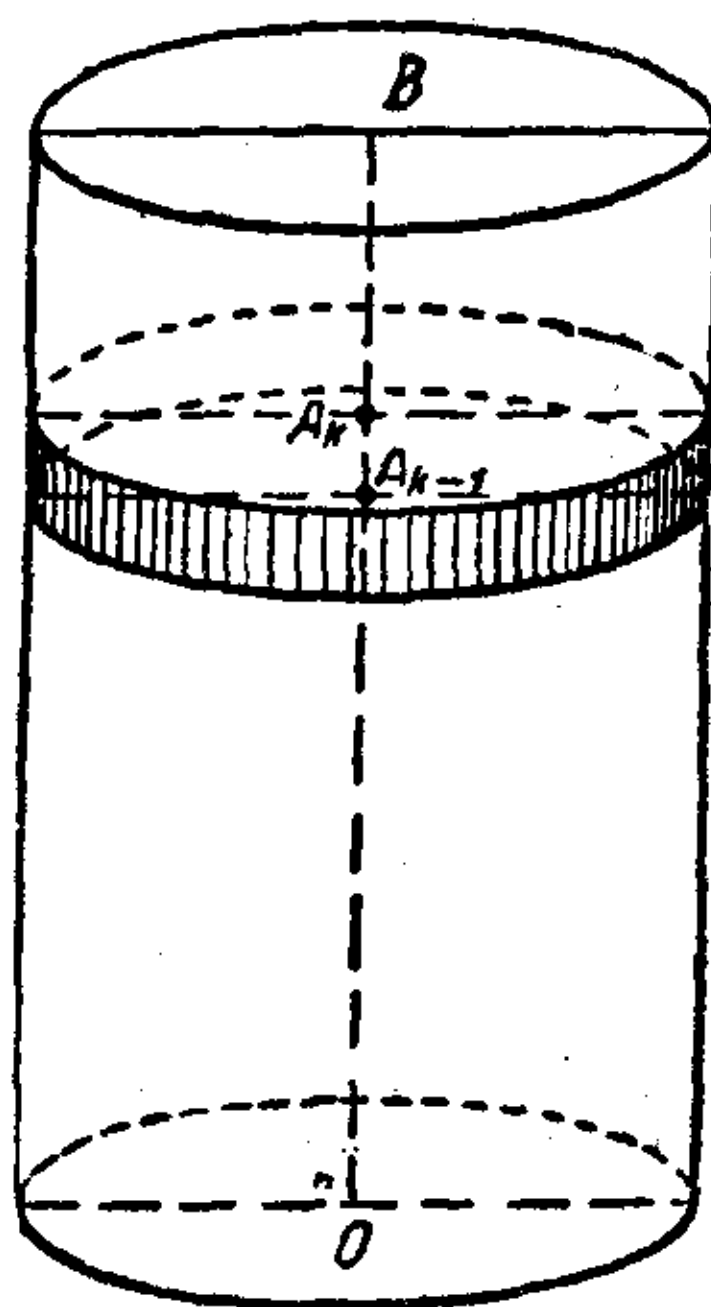


图 26.

綫段 $OA, OA_1, OA_2, OA_3, \dots, OA_{n-1}, OA_n$ 形成等比級数, 也就是这些綫段的長相应地等于 $\alpha, \alpha q, \alpha q^2, \alpha q^3, \dots, \alpha q^{n-1}, \alpha q^n$, 这里級数的公比 q 是从等式 $\alpha q^n = H$ 来确定的, 就是 $q = \sqrt[n]{\frac{H}{\alpha}}$, 那这个问题的解答就会很简单。

很明显, 这里的 $q > 1$, 而分綫段 $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ 的長是递增的。因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$, 所以当 n 无限增大的时候, 各分綫段的長就逐渐趋于零。

经过点

$$A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B$$

引一些垂直于圆柱軸的平面; 那么, 这些平面就把全部液体分成了 n 层水平的层。根据以上說的, 可以取相当大的 n 值, 使这些层的厚度任意小。

我們看看第 k 层液体 ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), 它在经过 A_{k-1} 点和 A_k 点的两个平面之間 (图 26)。当 n 相当大的时候, 这一层的厚度 $A_{k-1}A_k = \alpha q^k - \alpha q^{k-1} = \alpha q^{k-1}(q - 1)$ 可以看做是很小的; 因此可以認為, 在这一层所有的点都距离容器底上的小孔一样高。当液面从 A_k 点降到 A_{k-1} 点时, 水流速度 v_k 就可以看做是不变的, 而且根据 (11),

$$v_k = \sqrt{2g \cdot OA_{k-1}} = \sqrt{2g \alpha q^{k-1}}.$$

假如用 t_k 表示流出第 k 层的水所需要的时间, 那么 $t_k v_k \sigma$ 就应该等于这一层液体的体积, 也就是 $t_k v_k \sigma = \pi R^2 \cdot A_{k-1}A_k$ 。

把 $A_{k-1}A_k$ 和 v_k 的值代入, 得:

$$t_k = \frac{\pi R^2 (\alpha q^k - \alpha q^{k-1})}{\sigma \sqrt{2g \alpha q^{k-1}}}.$$

使 k 等于 $1, 2, 3, \dots, n$, 就可以求出第 $1, 2, 3, \dots, n$ 层

的水流尽的时间，而液面高度降到 α 时所需要的时间 T_a 可以近似地认为

$$T_a \approx \frac{\pi R^2(\alpha q - \alpha)}{\sigma \sqrt{2g\alpha}} + \frac{\pi R^2(\alpha q^2 - \alpha q)}{\sigma \sqrt{2g\alpha q}} + \dots + \frac{\pi R^2(\alpha q^n - \alpha q^{n-1})}{\sigma \sqrt{2g\alpha q^{n-1}}}.$$

把公因式括出，化简后得：

$$T_a \approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} \sqrt{\alpha} (q-1) \left(1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{2}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \dots + q^{\frac{n-1}{2}} \right).$$

然后，利用求等比级数各项的和的公式，公比是 $q^{\frac{1}{2}}$ ，得：

$$1 + q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{2}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \dots + q^{\frac{n-1}{2}} = \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q^{\frac{1}{2}} - 1}.$$

也就是

$$\begin{aligned} T_a &\approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} \sqrt{\alpha} (q-1) \frac{q^{\frac{n}{2}} - 1}{q^{\frac{1}{2}} - 1} \\ &= \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} \sqrt{\alpha} (q^{\frac{n}{2}} - 1)(q^{\frac{1}{2}} + 1). \end{aligned}$$

或者把 $q = \left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$ 代入，得：

$$T_a \approx \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{\alpha}) \left[\left(\frac{H}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2n}} + 1 \right].$$

n 越大，最后的近似等式的准确度也越大。当 n 无限增

大时($n \rightarrow \infty$),从极限得到时间 T_a 的准确值:

$$T_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{a}) \left[\left(\frac{H}{a} \right)^{\frac{1}{2n}} + 1 \right].$$

結果得:

$$T_a = \frac{2\pi R^2}{\sigma \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{a}).$$

假如在这个公式里 $a=0$, 那么全部液体从圆柱里流出所需的时间 T_0 可以用下面的等式求出:

$$T_0 = \frac{\pi R^2}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

七

在这一节里要讨论的,是求圆柱最有利的尺寸的问题.

问题是这样叙述的:

已知全面积是 S , 求直圆柱有最大体积时候的半径和高.

为了更清楚地了解这个问题,应该知道,全面积相等的圆柱有无限多. 问题是在要求出所有这些圆柱当中有最大体积的一个.

很明显,可以把全面积是 S 的圆柱做成这样: 它很高,但是这时候底的半径就会很小,并且当半径继续减小的时候,它的体积可以做成任意小. 同样也可以把底的半径增大,而为了使全面积 S 保持不变,高度就要减小,这样就得到底很大、高度很小的圆柱(这种圆柱的形状就象一个硬币),它的体积也是很小的. 显然,在这两种极端情形之间,存在着全面积是 S 而体积是最大的圆柱.

指出了这些情况以后,我們就来解答所提出的問題。

用 x 来代表圓柱的底半徑,用 y 来代表高(图 27)。按題义, x 和 y 只能是正的。这个情况在解答里是要用到的。再用 V 表示圓柱的体积;用 S 表示圓柱的全面积,它是一个常量。

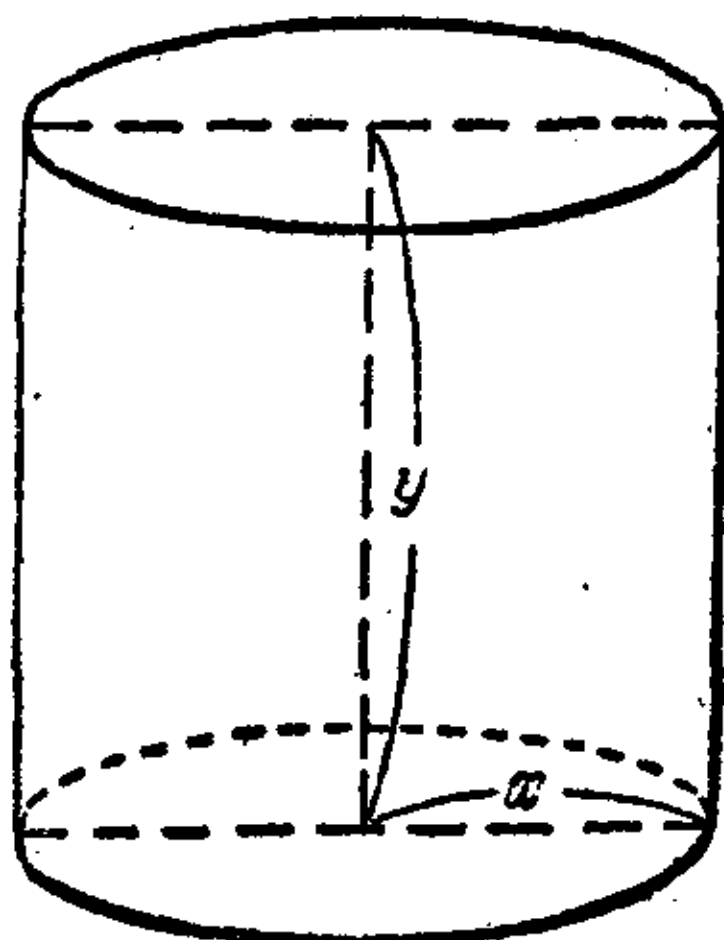


图 27.

为了求出圓柱的体积,我們采用早已知道的公式

$$V = \pi x^2 y. \quad (12)$$

这样, V 是随着两个变量 x 和 y 而变化的;但是因为全面积 S 是給定的,所以 x 和 y 之間存在着的关系可以用等式 $2\pi xy + 2\pi x^2 = S$ 来表示,用 2π 来除这个等式,得:

$$xy + x^2 = \frac{S}{2\pi}. \quad (13)$$

为了使計算簡化,我們不用常量 $\frac{S}{2\pi}$, 而引入另一个常量 λ , 假定

$$\frac{S}{2\pi} = 3\lambda^2 \quad (14)$$

或是 $S = 6\pi\lambda^2$,

根据这个改变,可以把(13)改写成: $xy + x^2 = 3\lambda^2$, 也就是

$$y = \frac{3\lambda^2}{x} - x. \quad (15)$$

把这个值代入公式(12),得:

$$V = \pi(3\lambda^2 x - x^3). \quad (16)$$

当全面积 S 是常量时,圓柱的底的半徑 x 和体积 V 之間

的关系就是这样的。现在需要求出在体积 V 最大的时候 x 的值。为了这个目的，我们把式子(16)改变一下，在(16)的右边部分加上 $2\pi\lambda^3$ 、再减去 $2\pi\lambda^3$ ；那么

$$V = 2\pi\lambda^3 - \pi(x^3 - 3\lambda^2x + 2\lambda^3). \quad (17)$$

为了下面讨论方便起见，把(17)右边括弧里的式子作因式分解：

$$\begin{aligned} x^3 - 3\lambda^2x + 2\lambda^3 &= x^3 - \lambda^3 - (2\lambda^2x - 3\lambda^3) \\ &= (x - \lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) - 3\lambda^2(x - \lambda) \\ &= (x - \lambda)(x^2 + \lambda x - 2\lambda^2) \\ &= (x - \lambda)[(x^2 - \lambda x) + (2\lambda x - 2\lambda^2)] \\ &= (x - \lambda)[x(x - \lambda) + 2\lambda(x - \lambda)] \\ &= (x - \lambda)^2(x + 2\lambda). \end{aligned}$$

这样，(17)可以改写成下面的样子：

$$V = 2\pi\lambda^3 - \pi(x - \lambda)^2(x + 2\lambda). \quad (18)$$

从上面的式子可以看出，圆柱的体积 V 等于正的常量 $2\pi\lambda^3$ 和变量 $\pi(x - \lambda)^2(x + 2\lambda)$ 的差。

第三个因式 $(x + 2\lambda)$ 是正的常量 x 和 2λ 的和，所以在 $x > 0$ 的情况下，这个因式总是正的；第二个因式 $(x - \lambda)^2$ ，当 $x \neq \lambda$ 的时候都是正的，只有当 $x = \lambda$ 的时候才是 0。

这样，在(18)右边的减数，当 $x > 0$ 的时候就不会是负的了。因此只有当这个减数是最小的时候，体积 V 才最大。但是这个减数的最小值是 0，而这只有当 $x = \lambda$ 的时候，在这个情况，

$$V_{\text{最大}} = 2\pi\lambda^3.$$

所以这个圆柱的底半径

$$x = \lambda$$

的时候,它有最大的体积.从公式(15),得到这个圆柱的高

$$y = \frac{2\lambda^2}{\lambda} - \lambda = 2\lambda.$$

因此:已知全面积是 S , 只有当底的半径 $x = \lambda$ 、高 $y = 2\lambda$ 的时候,圆柱才有最大的体积,这里的 λ 是由式子(14)决定的.并且这也说明了,已知全面积是 S , 只有当轴截面是一个正方形、它的边长等于 $2\lambda = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ 的时候,圆柱才有最大的体积.

我們上面討論的問題具有很大的实际意义.例如,在罐头工业里制造洋铁罐头的时候,就要利用到这个问题的结果.因为罐头的形状并不由它里头装的东西来决定,把它的底的半径和高按适当比例 ($2R = H$) 来制造的话,就可以节省大量资金.

八

在谈到这一节的正题以前,先来复习一下一个极限的等式,这个等式象雷布金著的三角课本里就有证明,在这里我們不再证明了.把它写出来是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (19)$$

(这里 x 是角的弧度),以后我們要用到它.

假如一个多面体的各个顶点都在某一个曲面上,我們說这个多面体内接于这个曲面.比如一个立方体的八个顶点都在一个球面上,这个立方体就是内接于这个球面.同样假如一个四面体的各个顶点都在某一曲面(曲面不一定是封闭的)

上,我們就說这个四面体内接于这个曲面. 必須指出,下面談到的,不但是曲面本身,就是內接于它的多面体,也不一定是封閉的.

假如有一个多面体内接于一个已知曲面,当这个多面体的面数无限增多的时候,它的各个面的面积就无限縮小,縮成了点,但是多面体在整个变化过程里要經常保持內接于这个曲面,而且假設在曲面上沒有不被多面体碰到的“空白点”.

这里就有一个問題:曲面的面积是不是可以看做內接于曲面的多面体当面数无限增多、而各个面的面积无限縮小时的面积的极限?

初看起来,这个問題的回答是肯定的,好象用这种方法是可以求出曲面的面积的. 但是,用这种方法来求曲面面积原来是不行的,这在下面的例子里可以看出.

举一个簡單的例子,就举圓柱的例子可以說明,曲面的面积不能从內接于曲面(現在我們指的是圓柱)的多面体当它所有的面无限縮小而趋于点时的面积的极限来求.

由于直圓柱的曲面是沿着軸无限延伸的,那么我們就研究圓柱的“一段”.假設这“一段”的“長”是 H . 也用 R 来代表圓柱的半徑.

作一个內接于这个圓柱的多面体,使它的所有的面都是同样的三角形. 我們把圓柱的高 H 分成 m 等分,并經過这些分点作一些垂直于高的平面. 这些平面把圓柱面分成 m 段,高都是 $\frac{H}{m}$. 同时在圓柱面上,有 $m+1$ 个把圓柱面分成这些段的圓. 把各个圓分成 n 等分,使每一个上的分点都对着相鄰

圓上被分成的弧的中點。

現在用被分成的弧的弦作為一條邊，並把這條弦的兩個端點和鄰圓上正對這弧中點的分點，用兩段直線連結起來，作成三角形（圖28上只畫出一段， $n=6$ ）。

這樣作成的三角形都是等腰三角形，並且它們相互之間全都相等。

因為形成的多面體的各面的頂角都在圓柱面上，所以這個多面體（ m 和 n 是任意的）內接於圓柱。在每段圓柱里都有 $2n$

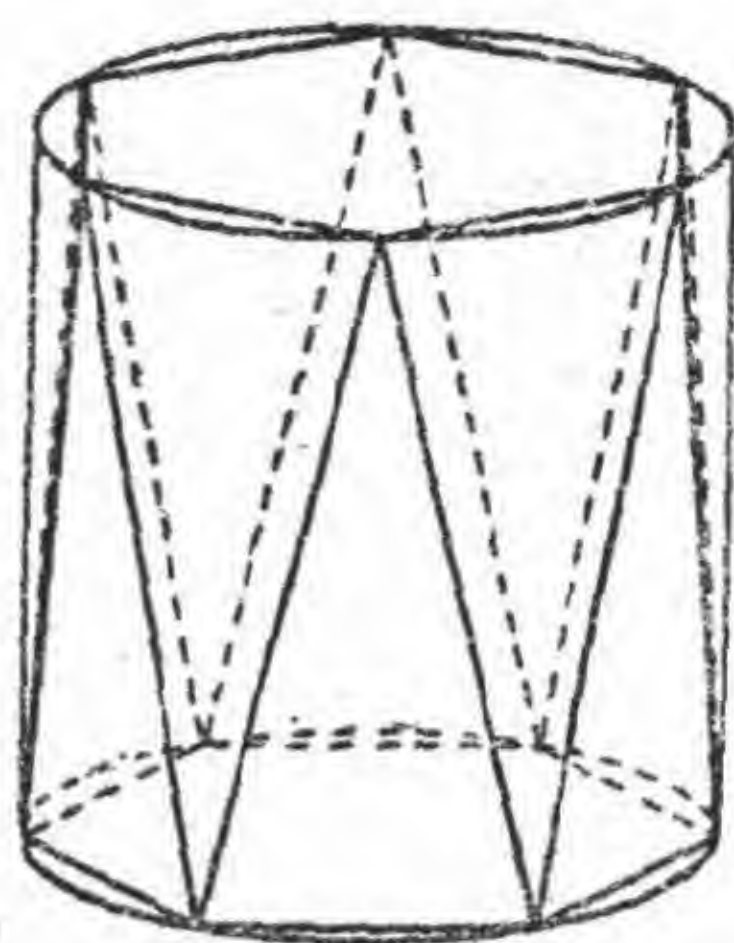


圖 28.

個這樣的三角形（ n 個三角形頂端向上， n 個三角形頂端向下），又因為圓柱面分成 m 段，所以內接多面體上共有 $2mn$ 個相等的三角形。這個多面體的一般形狀，見這兒的照片（圖 29）。這種多面體的模型很容易用一張紙做成。



圖 29.

為了這個，需要一張尺寸大約是 30×40 厘米的結實的紙（最好是繪圖紙），在上面畫一個跟圖 30 上 ABB_1A_1 相似的平行四邊形。把紙張沿着所畫的每一條直線折一下（一定要向兩邊折！）。然後，把平行四邊形卷成圓筒，使 A 點和 A_1 點重合， B 點和 B_1 點重合，並把模型沿直線 AB 膠合起來。

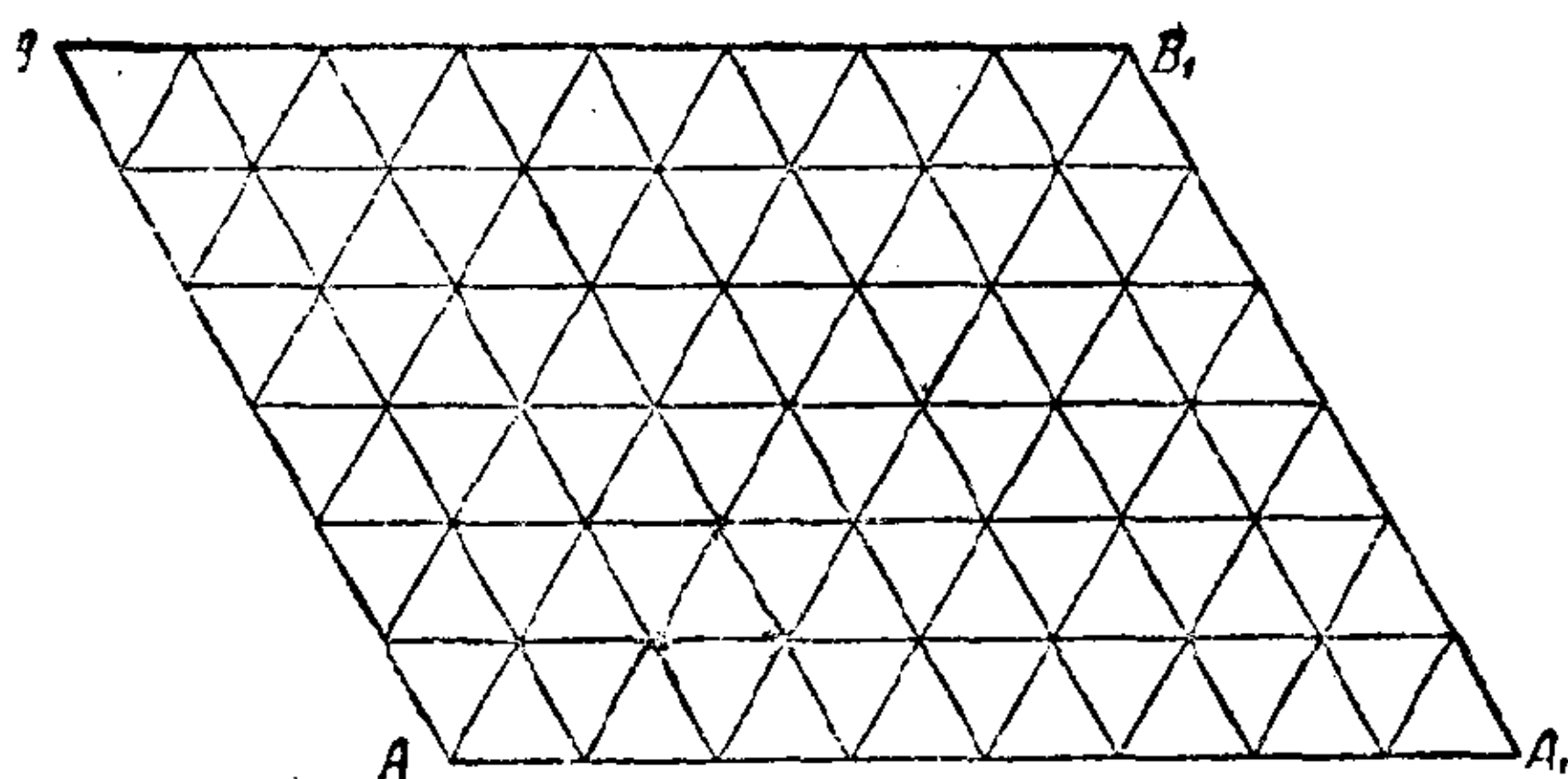


图 30.

現在回到我們的內接于圓柱的 $2mn$ 面體上. 為了求出它的面積, 只要求出它上面一個三角形的面積, 再乘上 $2mn$ 就行了.

那麼, 我們先求出這些三角形里面的一個的面積. 設這個三角形的三頂點是 A, B, C (圖 31). 角 AOB 等於 $\frac{2\pi}{n}$, 因而弦 $AB = 2R \sin \frac{\pi}{n}$. 綫段 KE 按下列公式求得:

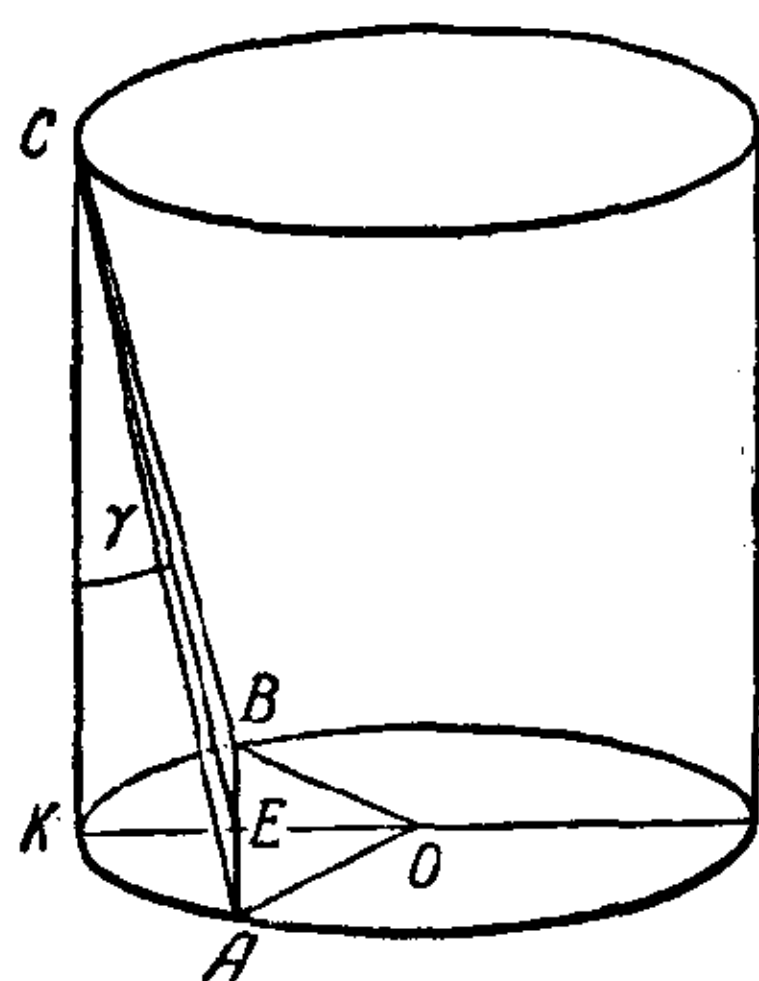


图 31.

$KE = R - R \cos \frac{\pi}{n} = 2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}$.
而在直角三角形 CEK 里, 因為直角邊 $CK = \frac{H}{m}$, 按勾股弦定理可以求出斜邊 CE , 它同時是三角形 ABC 的高. 這樣,

$$\begin{aligned} CE &= \sqrt{(CK)^2 + (KE)^2} \\ &= \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}, \end{aligned}$$

因此三角形 ABC 的面積等於

$$\frac{1}{2} AB \cdot EC = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

那么, 根据上面所说的, 内接于圆柱的多面体的面积是

$$S_{mn} = 2mnR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}},$$

或者稍稍改变一下,

$$S_{mn} = 2\pi RH \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{1 + 4 \frac{R^2}{H^2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \right)^4}. \quad (20)$$

设 m 和 n 无限增大, 那么各个面就缩小而趋于点; 这时候, S_{mn} 也在变化, 现在需要说明, S_{mn} 的极限是否存在.

为了弄清楚这一点, 必须注意, 把圆柱的高 H 分成 m 等分 and 把各个圆分成 n 等分这两件事之间, 是没有任何联系的. 换句话说, m 和 n 的值的選擇是互不相关的. 假如是这样, 就可能在某一个情况下 $m=n$, 而在另一个情况下 $m=n^2$ 等等.

现在来讨论 S_{mn} . 首先指出, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{n}$ 趋于零 ($\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$); 设 $\frac{\pi}{n} = x$, 根据极限等式 (19), 得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

这样, 在等式 (20) 里根号前的最后一个乘数, 当 n 趋于无穷大时, 它趋向于极限 1.

然后, 先假定 $m=n$; 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right)^4$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right)^2 = 0,$$

因此在这种特殊的假设下,从等式(20)得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = 2\pi RH \cdot 1 \cdot \sqrt{1+0} = 2\pi RH,$$

也就是在 $m=n$ 的特殊假设下,求得的极限值相当于圆柱侧面积的值。

现在假定 $m=n^2$,在这个情况下得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt{m}}} \right)^4 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} \right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)^4 = \frac{\pi^4}{16}. \end{aligned}$$

根据以上的极限等式,当 $m=n^2$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = 2\pi RH \cdot 1 \sqrt{1 + \frac{\pi^4 R^2}{4H^2}} > 2\pi RH,$$

这就是说,当 m 和 n 无限增大,而 $m=n^2$ 时,虽然各个面缩小趋于点,但多面体面积的极限并不等于圆柱的侧面积 $2\pi RH$,而是比它大一些。

这个看来很奇怪的现象的解释是这样的。在上面所说的两种情况里的第一种,也就是 $m=n$ 的时候,当 $n \rightarrow \infty$ 时,多面体各个面和圆柱母线所夹的角趋于 0,也就是说,当 $n \rightarrow \infty$ 时,多面体尽量向圆柱侧面靠攏。我们来证明这个事实。用 γ 来代表多面体的面和圆柱母线所夹的角 ECK (图 31); 那么有:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{EK}{KC} = \frac{2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{H}{m}},$$

但是因为 $m=n$, 所以

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2R}{H} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}.$$

于是应用等式(19), 求得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \gamma = \frac{2R}{H} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

这就证明了, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 各个面和圆柱母线之间的角等于零.

在第二种情况, 也就是当 $m=n^2$ 时, 有:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2R}{H} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{m}} = \frac{2R}{H} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{n}} \right)^2 = \frac{\pi^2 R}{2H} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^2.$$

于是应用等式(19), 求得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi^2 R}{2H}.$$

这样, 假如 $m=n^2$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 内接多面体的面和圆柱母线所夹的角趋于极限锐角 γ_0 , $\gamma_0 = \operatorname{arctg} \frac{\pi^2 R}{2H}$.

假设 $m=n^4$, 那么根据以上的讨论, 可以证明

$$\lim S_{mn} = \infty,$$

而各个面和圆柱母线所夹的角当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限是 $\frac{\pi}{2}$, 也就是多面体的各个面垂直于圆柱的母线. 这个内接多面体的表面, 就具有“凹凸不平”的性质 (n 越大, 凹凸越多).

这样, 求内接于圆柱的多面体面积的极限, 随着我们假设的 m 和 n 增长的相对速度的不同, 得到的这种极限值也不同. 所以, 假如 m 和 n 趋于无穷的时候可以有任何性质, 那么 S_{mn} 就不会趋向于某一个极限.

因此, 用这样的方法来求曲面的面积是不行的.